Mathématiques Approfondies, ECG 1ère année

Bienvenue en ECG au lycée Hoche !

Le rythme de travail sera soutenu dès les premiers jours, il ne faut donc pas attendre la rentrée pour vous remettre au travail. Il est toutefois inutile de "prendre de l'avance" sur le programme de l'année à venir. Mieux vaut faire des révisions sur les programmes de Mathématiques du lycée.

Par ailleurs, toutes les épreuves de mathématiques en ECG se déroulent dans les mêmes conditions : les épreuves durent quatre heures et la calculatrice y est interdite. Il est donc indispensable d'arriver dès la rentrée avec des bases de calcul solides.

Voici une liste de calculs à effectuer sans calculatrice, avec pour seuls outils un crayon et une feuille de papier.

Certains calculs vous paraîtront certainement très simples. Je vous conseille néanmoins de tous les traiter, car l'objectif de cette feuille d'entraînement est triple :

- Travailler la rapidité, l'efficacité et le calcul mental sur les calculs faciles ;
- Acquérir des réflexes sur les calculs classiques ;
- Déjouer les pièges dans les calculs les plus difficiles.

Il faut réussir à mener ces calculs vite et bien !

Vous pourrez bien sûr vérifier vos calculs à la calculatrice, mais seulement après les avoir effectués à la main. Les réponses finales sont données à la fin de ce document.

NB : Il n'est pas utile de rédiger vos réponses au propre pour la rentrée, ce travail personnel ne sera pas ramassé. Mais cet entraînement sera en revanche très utile pour les interrogations de calcul qui auront lieu dès la première semaine de la rentrée...

Entraînement au calcul

Résolution d'inéquations :
Résoudre les inéquations suivantes :

- $\dfrac{1}{x} < 3$
- $2 < 1 + 2x^2 \leqslant 5$
- $\dfrac{1-2x}{x(x+1)} \leqslant 0.$
- $\dfrac{1}{x-1} \leqslant 2.$
- $|1-2x| > 3.$
- $|3x^2-1| \leqslant 2.$

Résolution de systèmes :
- Résoudre $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$
- Résoudre $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, où a et b sont deux réels fixés.

Résolution d'équations :
- Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre $x + \sqrt{x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Représentations graphiques.
- Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes. On n'utilisera aucun tableau de valeurs. On tracera la courbe en tenant compte de ses particularités (sens de variation, intersections avec les axes, valeurs remarquables, tangentes, limites, asymptotes...)

$x \mapsto \exp(x)+1$ $\quad$ $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \sin(2x)$

$x \mapsto \exp(-x)$ $\quad$ $x \mapsto (x+1)^3$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x-1}$ $\quad$ $x \mapsto x(x+2)$

Calculs de dérivées et de primitives :

- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$.
- Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \cos(4x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto x(x-3)$ sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Simplifications :

- Lorsque les fractions sont simplifiables, les écrire sous forme de fractions irréductibles :

$\dfrac{123}{312}$ $\quad$ $\dfrac{89}{29}$ $\quad$ $\dfrac{35}{91}$ $\quad$ $\dfrac{37}{122}$

- Trouver deux nombres relatifs a et b tels que $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.
- Simplifier les expressions suivantes :

$\sqrt{(x-1)^2}$, lorsque $x \leqslant 1$. $\quad$ $\ln(\sqrt{x})$ lorsque $x > 0$. $\quad$ $\dfrac{\sin(n\pi)-\sin(\pi/6)}{2-\cos(\pi/3)}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{(1-2x)^4}$, lorsque $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ $(\sqrt{2})^{4n}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier les ensembles suivants :

$I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ où $I_k = \left[1, 1+\dfrac{1}{k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ où $I_k = \left[1, 1+\dfrac{1}{k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$J_1 \cap J_2 \cap ... \cap J_n$ où $J_k = \left[-k, \dfrac{1}{2k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_n$ où $J_k = \left[-k, \dfrac{1}{2k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Calculs de limites

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (e-1)^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2)e^{-n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$.

Factorisations et développements :

- Factoriser $2x^2-x-1$.
- Factoriser x^3+2x^2+x.
- Développer $(x-2)^3$.

Réponses :

Résolution d'inéquations :

- $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$
- $x \in]-1, 0[\cup[\frac{1}{2}, +\infty[$
- $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$
- $x \in [-1, 1]$.
- $x \in [-\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$
- $x \in]-\infty, 1[\cup[\frac{3}{2}, +\infty[$

Résolution de systèmes :

- $x = 2, y = 1$
- $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a-b}{2}$

Résolution d'équations :

- $x = \ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $x = \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.
- $x \in \mathbb{R}_-$.

Calculs de dérivées et de primitives :

- $F : x \mapsto \dfrac{-1}{(x-2)}$.
- $F : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$
- $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$
- $a = 1, b = -1$; $F : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1)$.
- $F : x \mapsto \dfrac{1}{4}\sin(4x)$
- $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$
- $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{(x-2)^3}$
- $f' : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}(2x^2-2x-1)}{(x-1)^2}$

Simplifications :

- $\dfrac{123}{312} = \dfrac{41}{104}$, $\dfrac{35}{91} = \dfrac{5}{13}$, $\dfrac{89}{29}$ et $\dfrac{37}{122}$ sont irréductibles.
- $a = b = -1$.
- $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$, lorsque $x \leqslant 1$.

$\sqrt{(1-2x)^4} = (1-2x)^2$, lorsque $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$ lorsque $x > 0$.

$(\sqrt{2})^{4n} = 4^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

$\dfrac{\sin(n\pi) - \sin(\pi/6)}{2 - \cos(\pi/3)} = \dfrac{-1}{3}$.

- $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n = \left[1, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$ et $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n = [1, 2[$.

$J_1 \cap J_2 \cap ... \cap J_n = \left[-1, \dfrac{1}{2n}\right[$ et $J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_n = \left[-n, \dfrac{1}{2}\right[$.

Calculs de limites

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (e-1)^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2)e^{-n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$.

Factorisations et développements :

- $2x^2 - x - 1 = 2(x + \dfrac{1}{2})(x-1)$
- $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$
- $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$