

Mathématiques Approfondies, ECG 1ère année

Bienvenue en ECG au lycée Hoche !

Voici quelques recommandations à suivre afin d'aborder la classe préparatoire dans les meilleures conditions.

Le rythme de travail sera soutenu dès les premiers jours, il ne faut donc pas attendre la rentrée pour vous remettre au travail. Il est toutefois inutile de "prendre de l'avance" sur le programme de l'année à venir. Mieux vaut faire des révisions sur les programmes de Mathématiques du lycée. Il est impératif de maîtriser complètement les programmes de Mathématiques de Première et de Terminale, cours et exercices. Si nécessaire, retravaillez certains points pendant l'été, car à la rentrée, vous n'aurez plus le temps de vous y attarder.

Par ailleurs, toutes les épreuves de mathématiques en ECG se déroulent dans les mêmes conditions : les épreuves durent quatre heures et la calculatrice y est interdite. Il est donc indispensable d'arriver dès la rentrée avec des bases de calcul solides.

Voici une liste de calculs à effectuer sans calculatrice, avec pour seuls outils un crayon et une feuille de papier.

Certains calculs vous paraîtront certainement très simples. Je vous conseille néanmoins de tous les traiter, car l'objectif de cette feuille d'entraînement est triple :

- Travailler la rapidité, l'efficacité et le calcul mental sur les calculs faciles ;
- Acquérir des réflexes sur les calculs classiques ;
- Déjouer les pièges dans les calculs les plus difficiles.

Il faut réussir à mener ces calculs vite et bien !

Vous pourrez bien sûr vérifier vos calculs à la calculatrice, mais seulement après les avoir effectués à la main. Les réponses finales sont données à la fin de ce document.

NB : Il n'est pas utile de rédiger vos réponses au propre pour la rentrée, ce travail personnel ne sera pas ramassé. Mais cet entraînement sera en revanche très utile pour les interrogations de calcul qui auront lieu à chaque début de cours, dès la première semaine de la rentrée.

Vous trouverez en fin de document les deux premières interrogations de calcul données à la rentrée 2021.

Ces interrogations se font en cinq minutes, montre en main. Selon votre position dans la classe vous aurez à répondre aux questions de gauche (G) ou de droite (D). Seul le résultat final compte et doit être écrit (vous disposez bien sûr d'un brouillon pour effectuer les calculs). Chaque bonne réponse rapporte un point. Chaque interrogation est notée sur 5. Entraînez-vous, il faut les réussir dans le temps imparti !

Entraînement au calcul

Résolution d'inéquations :

Résoudre les inéquations suivantes :

- $\frac{1}{x} < 3$
- $2 < 1 + 2x^2 \leq 5$
- $\frac{1-2x}{x(x+1)} \leq 0$.
- $\frac{1}{x-1} \leq 2$.
- $|1-2x| > 3$.
- $|3x^2-1| \leq 2$.

Résolution de systèmes :

- Résoudre $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+2y=4 \end{cases}$
- Résoudre $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$, où a et b sont deux réels fixés.

Résolution d'équations :

- Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre $x + \sqrt{x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Représentations graphiques.

• Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes. On n'utilisera aucun tableau de valeurs. On tracera la courbe en tenant compte de ses particularités (sens de variation, intersections avec les axes, valeurs remarquables, tangentes, limites, asymptotes...)

$$\begin{array}{llll} x \mapsto \exp(x) + 1 & x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right) & x \mapsto \sqrt{x} & x \mapsto \sin(2x) \\ x \mapsto \exp(-x) & x \mapsto (x+1)^3 & x \mapsto \sqrt{x-1} & x \mapsto x(x+2) \end{array}$$

Calculs de dérivées et de primitives :

- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x}}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$.
- Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto \cos(4x)$ sur \mathbb{R} .
- Calculer une primitive de $f : x \mapsto x(x-3)$ sur \mathbb{R} .
- Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \frac{e^{x^2}}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Simplifications :

• Lorsque les fractions sont simplifiables, les écrire sous forme de fractions irréductibles :

$$\frac{123}{312} \quad \frac{89}{29} \quad \frac{35}{91} \quad \frac{37}{122}$$

• Trouver deux nombres relatifs a et b tels que $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{5}$.

• Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \sqrt{(x-1)^2}, \text{ lorsque } x \leq 1. & \ln(\sqrt{x}) \text{ lorsque } x > 0. & \frac{\sin(n\pi) - \sin(\pi/6)}{2 - \cos(\pi/3)} \text{ lorsque } n \in \mathbb{N}. \\ \sqrt{(1-2x)^4}, \text{ lorsque } x \in \mathbb{R}. & (\sqrt{2})^{4n} \text{ lorsque } n \in \mathbb{N}. & \end{array}$$

• Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier les ensembles suivants :

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n \text{ où } I_k = \left[1, 1 + \frac{1}{k}\right] \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

$$I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \text{ où } I_k = \left[1, 1 + \frac{1}{k}\right] \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

$$J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n \text{ où } J_k = \left[-k, \frac{1}{2k}\right] \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

$$J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n \text{ où } J_k = \left[-k, \frac{1}{2k}\right] \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

Calculs de limites

$$\begin{array}{llll} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2})^n & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^2)e^{-n} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1)^n & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \end{array}$$

Factorisations et développements :

- Factoriser $2x^2 - x - 1$.
- Factoriser $x^3 + 2x^2 + x$.
- Développer $(x-2)^3$.

Réponses :

Résolution d'inéquations :

- $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$
- $x \in]-1, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$
- $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$
- $x \in [-\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$
- $x \in]-\infty, 1[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$
- $x \in [-1, 1]$.

Résolution de systèmes :

- $x = 2, y = 1$
- $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$

Résolution d'équations :

- $x = \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $x = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.
- $x \in \mathbb{R}_-$.

Calculs de dérivées et de primitives :

- $F : x \mapsto \frac{-1}{(x-2)}$
- $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $F : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$
- $f' : x \mapsto \frac{-2}{(x-2)^3}$
- $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$
- $f' : x \mapsto \frac{e^{x^2}(2x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^2}$
- $a = 1, b = -1; F : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1)$
- $F : x \mapsto \frac{1}{4} \sin(4x)$

Simplifications :

- $\frac{123}{312} = \frac{41}{104}, \frac{35}{91} = \frac{5}{13}, \frac{89}{29}$ et $\frac{37}{122}$ sont irréductibles.
- $a = b = -1$.

- $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$, lorsque $x \leq 1$.
- $\sqrt{(1-2x)^4} = (1-2x)^2$, lorsque $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x) \text{ lorsque } x > 0.$$

$$(\sqrt{2})^{4n} = 4^n \text{ lorsque } n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{\sin(n\pi) - \sin(\pi/6)}{2 - \cos(\pi/3)} = \frac{-1}{3}.$$

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right[\text{ et } I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = [1, 2[.$$

$$J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n = \left[-1, \frac{1}{2n}\right[\text{ et } J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n = \left[-n, \frac{1}{2}\right[.$$

Calculs de limites

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2})^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^2)e^{-n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1)^n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3$.

Factorisations et développements :

- $2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$
- $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$
- $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

..... **Calculs : interrogation 1**

G D

G : Dériver $x \mapsto \sin^2(x)$.

D : Deriver $x \mapsto \cos^2(x)$.

G : Ecrire sous forme de fraction irréductible $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} + \frac{3}{7}$

D : Ecrire sous forme de fraction irréductible $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{6}} + \frac{3}{10}$

G : Résoudre $-2 < 1 - x^2 \leq 0$

D : Résoudre $-3 \leq 2 - x^2 < 1$

Cette question compte double!

G : Tracer au dos de la feuille l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

D : Tracer au dos de la feuille l'allure de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

..... **Calculs : interrogation 2**

G D

G : Trouver des réels a et b (indépendants de x) tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$.

D : Trouver des réels a et b (indépendants de x) tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, $\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

G : Simplifier $\frac{x(x-1)}{\sqrt{x}(x^2-1)}$

D : Simplifier $\frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x}(x+1)}$

G : Calculer $\frac{(2^{-2})^3}{(-5)^{-2} \times (-10)^0}$.

D : Calculer $\frac{(2^{-3})^2}{(-7)^{-2} \times (-14)^0}$.

Cette question compte double!

G : Résoudre $\frac{x-1}{x-2} \leq 1$.

D : Résoudre $\frac{x+1}{x+2} \leq 1$.