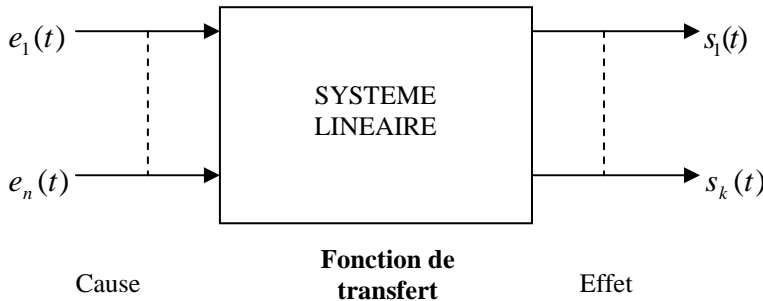


| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | PRESENTATION SLCI : | 2 |
| 1.1 | SYSTEMES LINEAIRES : | 2 |
| 1.2 | SYSTEME CONTINU : | 2 |
| 1.3 | SYSTEME INVARIANT : | 3 |
| 1.4 | SYSTEMES NON LINEAIRES: | 3 |
| 2 | REPRESENTATION DES SLCI: | 4 |
| 3 | ENTREES TYPES | 4 |
| 4 | TRANSFORMATION DE LAPLACE: | 5 |
| 4.1 | TRANSFORMEE DE LAPLACE : A QUOI ÇA SERT ? | 5 |
| 4.2 | DEFINITION: | 5 |
| 4.3 | -PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE: | 6 |
| 4.4 | - TRANSFORMEES DE FONCTIONS COURANTES: | 7 |
| 4.5 | EXEMPLE DE RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE | 8 |
| 5 | FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME: | 8 |
| 5.1 | GENERALITES | 8 |
| 5.2 | INTERET | 9 |
| 5.3 | FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE D'UN SYSTEME ASSERVI: | 10 |
| 5.4 | FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE: | 10 |
| 6 | OPERATIONS SUR LES SCHEMAS BLOCS: | 11 |
| 6.1 | ÉLÉMENTS DE BASE | 11 |
| 6.2 | OPERATIONS SUR LES SCHEMAS BLOCS | 11 |
| 7 | SYSTEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX: | 13 |
| 7.1 | FONCTION DE TRANSFERT | 13 |
| 7.2 | REPOSE A UN ECHELON | 13 |
| 7.3 | REPOSE A UNE IMPULSION | 19 |
| 7.4 | .REPOSE A UNE RAMPE | 21 |
| 8 | IDENTIFICATION D'UN MODELE DE COMPORTEMENT A PARTIR D'UNE REPOSE A UN ECHELON | 23 |
| 8.1 | PRINCIPE | 23 |
| 8.2 | IDENTIFICATION D'UN PREMIER ORDRE NON RETARDE | 24 |
| 8.3 | IDENTIFICATION D'UN PREMIER ORDRE RETARDE | 25 |
| 8.4 | .IDENTIFICATION PAR UN 2 ^{EME} ORDRE APERIODIQUE | 25 |
| 8.5 | .IDENTIFICATION PAR UN 2 ^{EME} ORDRE PSEUDOPERIODIQUE | 26 |
| 9 | ANALYSE HARMONIQUE | 28 |
| 9.1 | PRINCIPES | 28 |
| 9.2 | LIEUX DE TRANSFERT | 29 |
| 9.3 | PREMIER ORDRE | 32 |
| 9.4 | IDENTIFICATION D'UN MODELE DU PREMIER ORDRE A PARTIR DE LA REPOSE HARMONIQUE | 33 |
| 9.5 | REPOSE HARMONIQUE D'UN MODELE DU DEUXIEME ORDRE | 34 |
| 9.6 | .IDENTIFICATION D'UN MODELE DU DEUXIEME ORDRE A PARTIR DE LA REPOSE HARMONIQUE | 37 |

1 Présentation SLCI :

Un système linéaire est représenté sous la forme de schémas-blocs, les entrées (**Causes**) étant situées généralement à gauche et les sorties (**Effets**) à droite. L'intérieur du bloc contient une description du système étudié (**Fonction de transfert**).



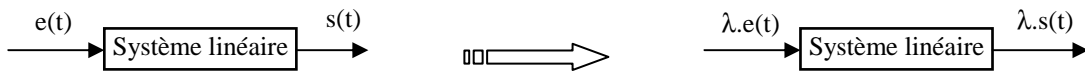
Remarque : Dans les cas réels, $k \leq n$, on parle alors de système causal: la cause $e(t)$ précède l'effet $s(t)$.

1.1 Systèmes linéaires :

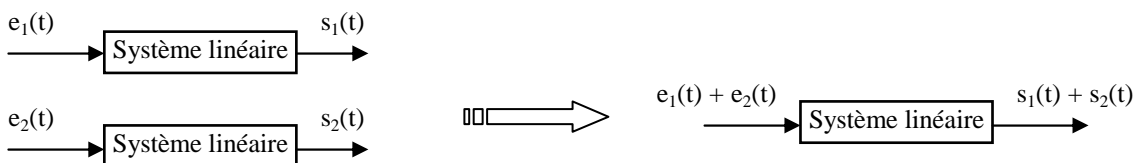
Un système est dit **linéaire** si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition:

-Proportionnalité :

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda s(t)$ est la réponse à $\lambda e(t)$.



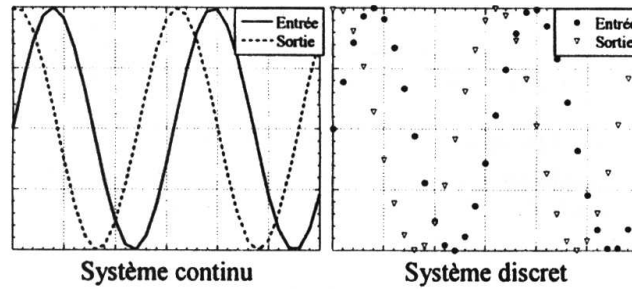
-Superposition :



1.2 Système continu :

Un système est **continu**, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions à temps continu et que l'on peut donc définir ces grandeurs à tout instant. On parle aussi dans ce cas de système analogique.

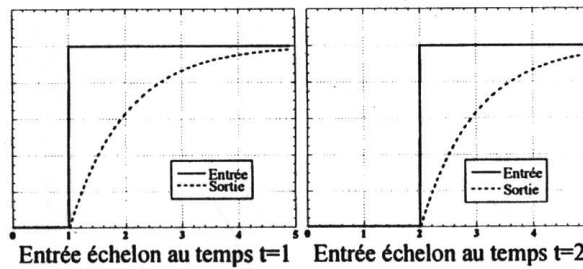
La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus. Un système informatique par contre a besoin d'un temps non nul pour réaliser un traitement de l'information. On ne peut donc pas le qualifier de système continu, il ne peut que traiter des échantillons des signaux continus qui lui sont soumis, on parle dans ce cas de système échantillonné.



1.3 Système invariant :

Un système est dit **invariant** si on suppose que les caractéristiques du système (*masse, dimensions, résistance, impédance, ...*) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

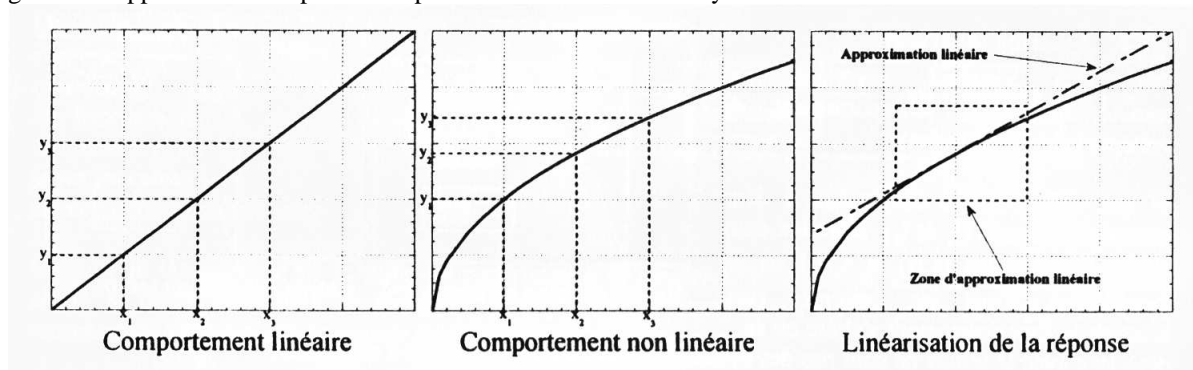
Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $s(t-\tau)$ est la réponse à $e(t-\tau)$.



1.4 Systèmes non linéaires:

1.4.1 Comment traiter les non linéarités

La plus part des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'application. Cependant dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine. Sous ces conditions, il est possible en général d'approcher le comportement par un modèle linéaire. Le système est dit alors linéarisé.



1.4.2 Quelques non linéarités remarquables

Les systèmes réels présentent des non linéarités. Voici quelques cas très couramment observés :

| Dénomination | Saturation | Seuil | Hystérésis |
|--------------|---|------------|---|
| Schéma | | | |
| Exemples | Butée mécanique, aimantation, moteur électrique | frottement | Jeux mécaniques, matériaux (élastomère) |

2 Représentation des SLCI:

En réalité, les systèmes qu'on étudiera ne sont ni continus (point de vue microscopique), ni invariants (vieillessement), ni linéaires. En faisant des hypothèses simplificatrices, on se ramène à ce cas, c'est-à-dire à des systèmes dont le comportement peut être représenté par des équations différentielles à coefficients constants:

Equation fondamentale

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

Deux modèles de systèmes fondamentaux sont à étudier dans le cadre des classes préparatoires :

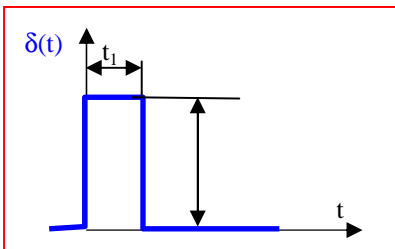
- les systèmes du premier ordre : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$
- les systèmes du deuxième ordre : $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K \omega_0^2 e(t)$
- gain $s(t) = b_0 e(t)$
- dérivateur $s(t) = b_1 \frac{de(t)}{dt}$
- intégrateur $a_1 \frac{ds(t)}{dt} = e(t)$

3 Entrées Types

Fonction de Dirac (ou impulsion unité) $\delta(t)$:

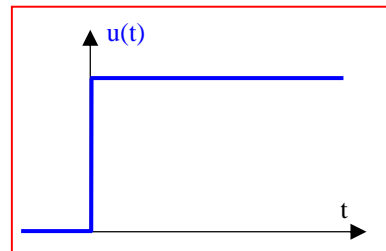
$$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$$

Cette fonction représente une action s'exerçant pendant un temps très court.



Fonction échelon unité $u(t)$:

$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } u(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$



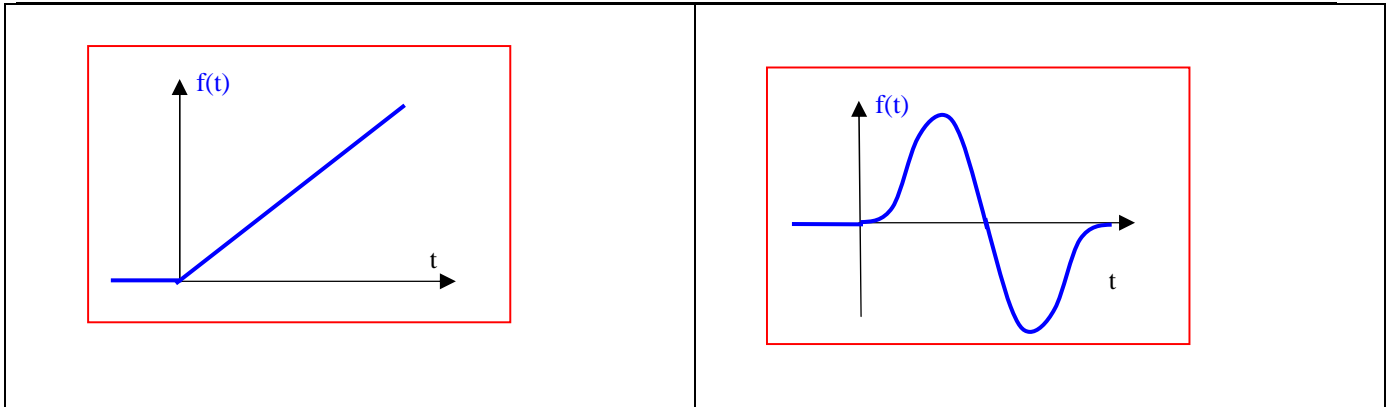
remarque : la réponse à l'échelon unité est appelée réponse indicielle.

Fonction rampe de pente unitaire:

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = t \text{ si } t \geq 0 \text{ donc } f(t) = t \cdot u(t)$$

Fonction sinusoïdale:

$$f(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$$



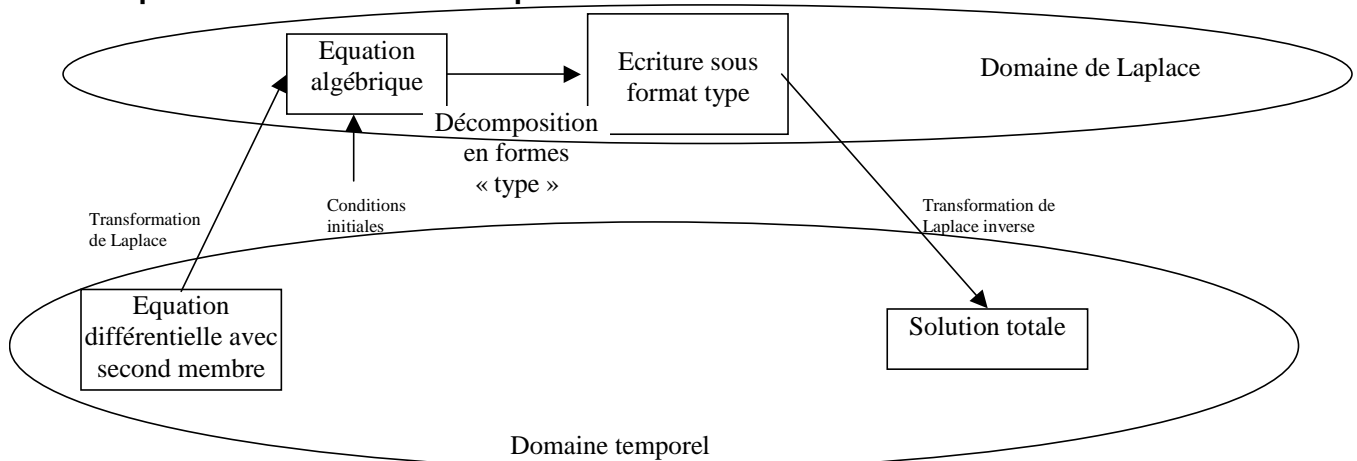
4 Transformation de Laplace:

4.1 Transformée de Laplace : A quoi ça sert ?

Il s'agit d'une méthode de résolution pour résoudre les systèmes d'équa diff

La transformation mathématique va remplacer la résolution de l'équation différentielle par l'étude d'une fraction polynomiale

Méthode par les transformées de Laplace :



4.2 Définition:

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est notée $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Avec :

- p est une variable complexe. $p=a+jb$
- $f(t)$ est intégrable
- $f(t)$ croît moins vite qu'une exponentielle (\Rightarrow convergence)

Conditions de Heaviside :

On dit qu'une fonction du temps $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie :

$$\begin{cases} f(0^+) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \\ f''(0^+) = 0, \dots \end{cases}, \text{ c'est à dire si les conditions initiales sont nulles}$$

4.3 -Propriétés de la transformée de Laplace:

4.3.1 -Propriétés générales :

- Unicité: à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique,
à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.

- Linéarité: $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$
 $\mathcal{L}[\lambda f(t)] = \lambda \mathcal{L}[f(t)] = \lambda F(p)$

- Transformée de la dérivée:

Pour cela, intégrons par partie :

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left[e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (e^{-pt})' f(t) dt \\ &= p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt - f(0^+) = pL[f(t)] - f(0^+) \end{aligned}$$

Car la fonction $f(t)$ est intégrable. Ainsi, nous avons de même, avec la même démarche :

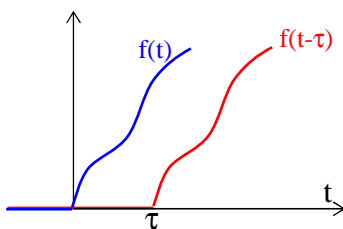
$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= pL[f(t)] - f(0^+) \\ L[f''(t)] &= p^2 L[f(t)] - pf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

Dans les conditions de Heaviside, une dérivation dans le domaine temporel revient à une multiplication par p dans le domaine symbolique de Laplace.

- Transformée de l'intégrale:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

- Théorème du retard:



$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p)$$

4.3.2 - Théorème de la valeur initiale:

Ce théorème permet de déterminer la valeur initiale du système.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

4.3.3 - Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Remarque1: ces deux derniers résultats n'ont de sens que si les limites existent.

Remarque2: faire attention au **p** dans les théorèmes précédents. Ne pas l'oublier !

4.4 – Transformées de fonctions courantes:

démonstration échelon unité

$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } u(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} \Rightarrow \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

Démonstration exponentiel

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot u(t)] = \frac{1}{p+a}$$

Tableau des transformées de Laplace usuelles

| f(t)u(t) | F(p) | f(t)u(t) | F(p) |
|------------------|---------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 | $e^{-at} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ |
| K | $\frac{K}{p}$ | $e^{-at} \cos(\omega t)$ | $\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$ |
| Kt | $\frac{K}{p^2}$ | $e^{at} t^n$ | $\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ |
| e^{-at} | $\frac{1}{p+a}$ | t^n | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ | $1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $\frac{1}{p(1 + \tau p)}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ | | |

Fonction de Dirac (ou impulsion unité) $\delta(t)$:

par définition $\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$

Cette fonction représente une action s'exerçant pendant un temps très court.

d'où $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} [e^{-pt}]_{t=0} \cdot \delta(t) dt = 1$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Fonction rampe de pente unitaire:

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = t \text{ si } t \geq 0 \text{ donc } f(t) = t \cdot u(t)$$

$$\frac{df}{dt} = u(t) \Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot u(t)] = \frac{U(p)}{p} + \frac{f(0)}{p} \Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot u(t)] = \frac{1}{p^2}$$

Fonction sinusoïdale: $f(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t \, dt \quad \text{qu'on intègre par parties en posant } du = \sin \omega t \, dt \quad \text{et } v = e^{-pt}$$

$$= \left[\frac{-\cos \omega t}{\omega} e^{-pt} \right]_0^{\infty} - \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} \, dt = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \left\{ \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} \, dt \right\} = \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2} F(p)$$

$$\mathcal{L} [\sin \omega t \cdot u(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

4.5 Exemple de résolution d'une équation différentielle

Soit un système régi par l'équation différentielle $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 5 \frac{ds(t)}{dt} + 6s(t) = e(t)$ avec $s(0) = 2$, $s'(0) = 2$ et $e(t) = 6u(t)$

On applique la transformation de Laplace à cette équation:

$$L \left[\frac{d^2 s(t)}{dt^2} \right] + 5L \left[\frac{ds(t)}{dt} \right] + 6L[s(t)] = L[e(t)]$$

$$p^2 S(p) - p s(0) - s'(0) + 5 [p S(p) - s(0)] + 6 S(p) = E(p)$$

$$p^2 S(p) - 2p - 2 + 5[p S(p) - 2] + 6 S(p) = \frac{6}{p}$$

soit
$$S(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)}$$

On décompose cette fraction en éléments simples: $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

Par identification, on trouve $S(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$

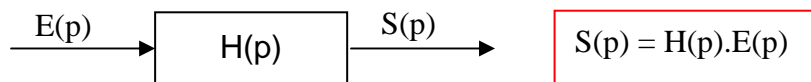
On retourne au domaine temporel en prenant les transformées inverses, d'où :

$$s(t) = (1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t})u(t)$$

5 Fonction de transfert d'un système:

5.1 Généralités

notation : Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc



La fonction de transfert d'un SLCI est dans les conditions de Heaviside :

On appelle **fonction de transfert H(p)** du système:
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

Démonstration :

Soit un système décrit par l'équation différentielle: $a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} + \dots + b_0 e(t)$

d'après le théorème de la dérivée dans les conditions d'Heaviside):: $\mathcal{L} \left[\frac{d^n s(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p)$

On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle:

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

$$\text{d'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_k p^k + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

Cette relation est très utile pour calculer des réponses temporelles de systèmes à l'aide de transformée de Laplace. Il suffit de calculer la transmittance du système, de prendre la transformée de Laplace du signal d'entrée et de faire le produit de ces deux grandeurs. Une transformée inverse donne enfin la réponse temporelle souhaitée.

La fonction de transfert représente le comportement du système et s'exprime simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle) construits à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution.

Forme canonique de la fonction de transfert:

avec n = ordre du système
 α = classe du système
 K = gain statique

$$H(p) = \frac{K(1 + \dots + b_m p^m)}{p^\alpha (1 + \dots + a_n p^n)}$$

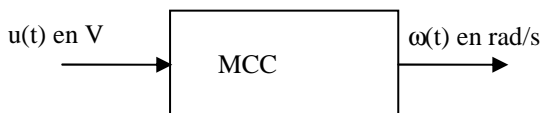
En explicitant les racines (complexes éventuellement) de ces polynômes, $H(p)$ peut s'écrire:

$$H(p) = \frac{k(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \text{ les } z_i \text{ sont les zéros et les } p_i \text{ les pôles de la fonction de transfert.}$$

5.2 Intérêt

La connaissance de la fonction de transfert d'un système permet de connaître sa réponse à une sollicitation sans résolution d'équations différentielles

Considérons le système moteur électrique

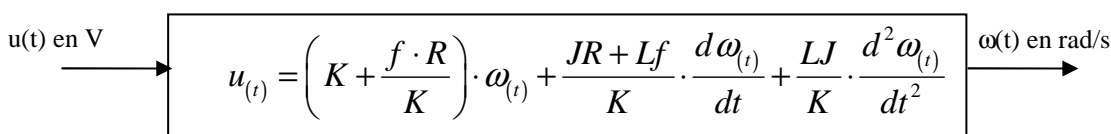


Son comportement est régi par les équations suivantes :

- électrique : $u_{(t)} = e_{(t)} + R \cdot i_{(t)} + L \cdot \frac{di_{(t)}}{dt}$
- électromécanique : $e_{(t)} = K \cdot \omega_{(t)}$ et $c_{(t)} = K \cdot i_{(t)}$
- mécanique : $J \cdot \frac{d\omega_{(t)}}{dt} = c_{(t)} - f \cdot \omega_{(t)}$

On a donc

$$u_{(t)} = K \cdot \omega_{(t)} + \frac{R}{K} \cdot \left(J \cdot \frac{d\omega_{(t)}}{dt} + f \cdot \omega_{(t)} \right) + \frac{L}{K} \cdot \frac{d}{dt} \left(J \cdot \frac{d\omega_{(t)}}{dt} + f \cdot \omega_{(t)} \right)$$

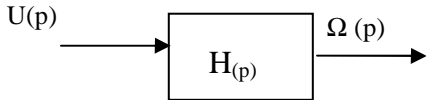


Dans le domaine de Laplace et dans les conditions de Heaviside, cette équation devient :

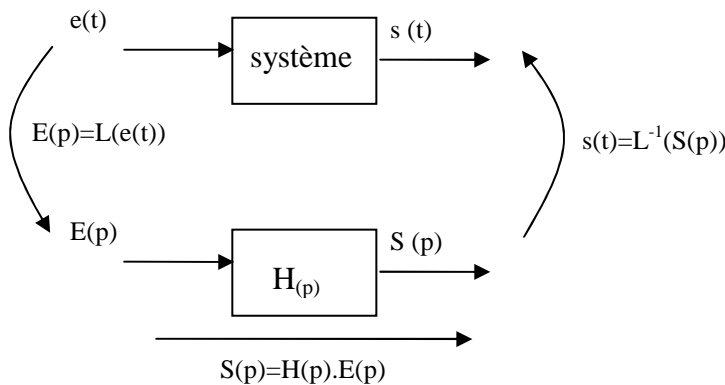
$$U_{(p)} = \left[K + \frac{1}{K} \cdot (f \cdot R + (JR + Lf) \cdot p + LJ \cdot p^2) \right] \cdot \Omega_{(p)}$$

D'où $\frac{\Omega_{(p)}}{U_{(p)}} = H_{(p)} = \frac{1}{\left[K + \frac{1}{K} \cdot ((R + Lp) \cdot (Jp + f)) \right]}$

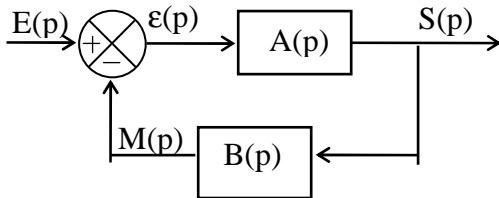
Le système peut être représenté par



La réponse à une entrée e(t) connue est donnée en utilisant la démarche suivante :



5.3 Fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi:



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

5.4 Fonction de transfert en boucle ouverte:

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne d'action et la chaîne de mesure.

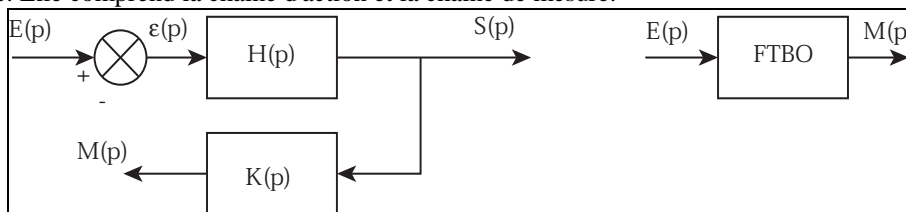
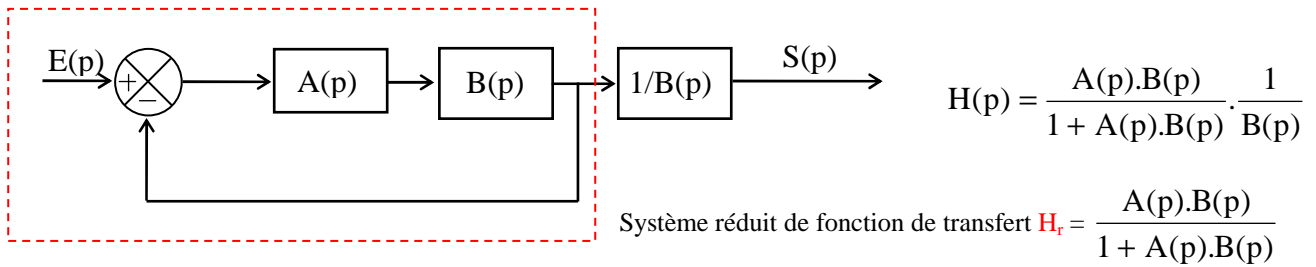


Figure 1 : Système en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$FTBO = \frac{M(p)}{E(p)} = H(p) \cdot K(p)$$

On peut toujours se ramener à un système à retour unitaire:



On note FTBO la fonction de transfert en boucle ouverte du système soit FTBO = A.B et on étudie la fonction de transfert du système réduit soit

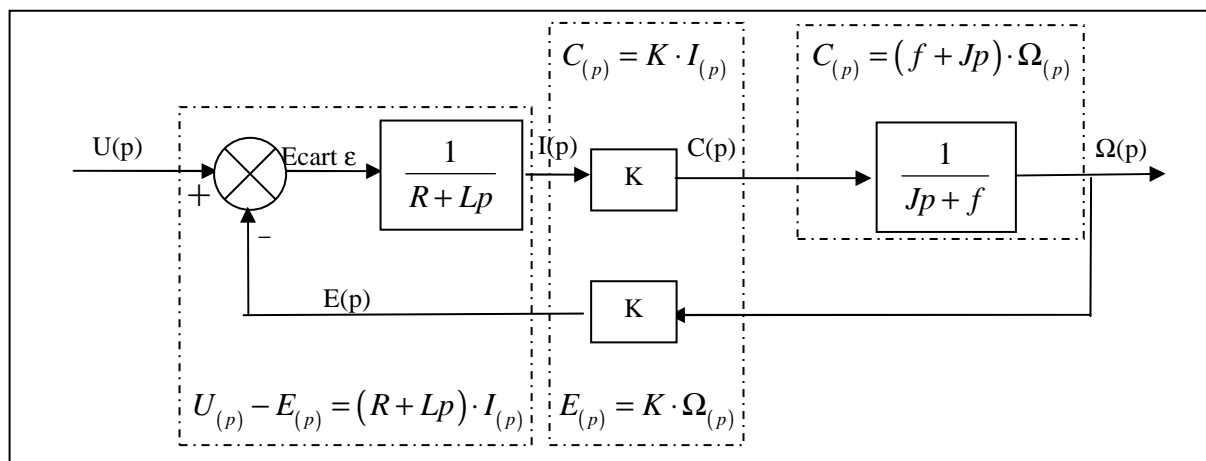
$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

Si on connaît la FTBO (en général simple à calculer), la FTBF se trouve en réalisant la transformation

6 Opérations sur les schémas blocs:

6.1 Éléments de base

Exemple :



Les blocs : Ils contiennent une fonction de transfert (H(p)) caractérisant la relation entre l'entrée et la sortie.

Les liens : Ils représentent une grandeur (U(p)) dans le domaine de Laplace.

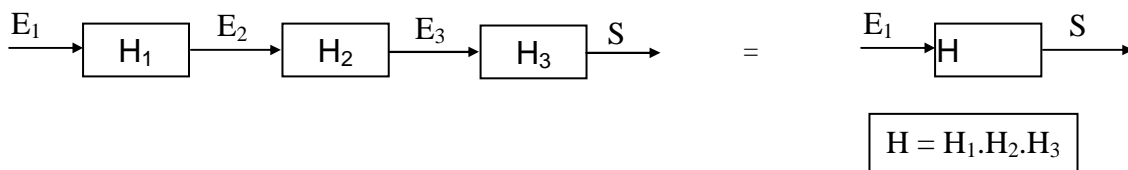
Les points de jonction : Une jonction permet de transmettre une grandeur en entrée de plusieurs blocs ou sommateurs.

Les sommateurs : Ils additionnent (ou soustraient selon le signe) les différentes entrées. Ils n'ont qu'une sortie.

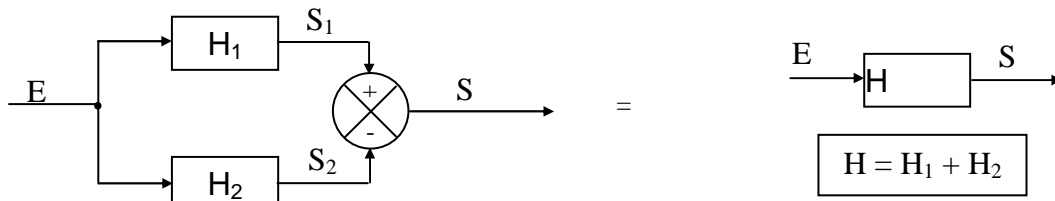
Les termes qui dépendent du temps deviennent les entrées et sorties des schémas blocs

6.2 Opérations sur les schémas blocs

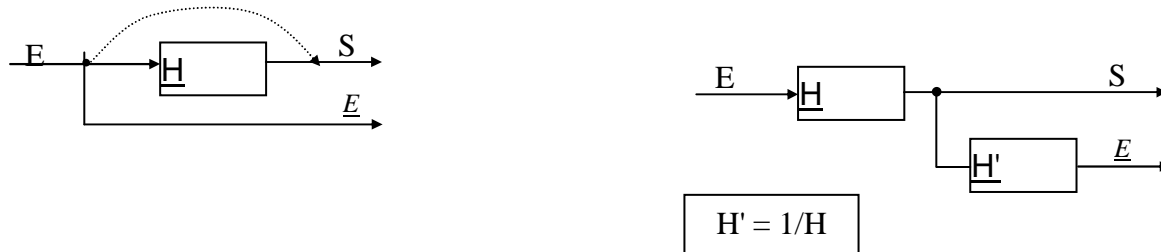
FT en série



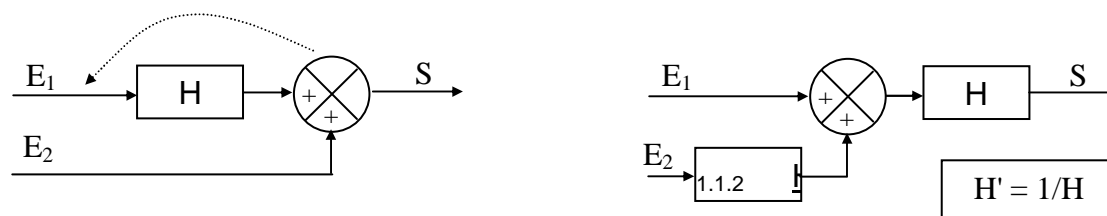
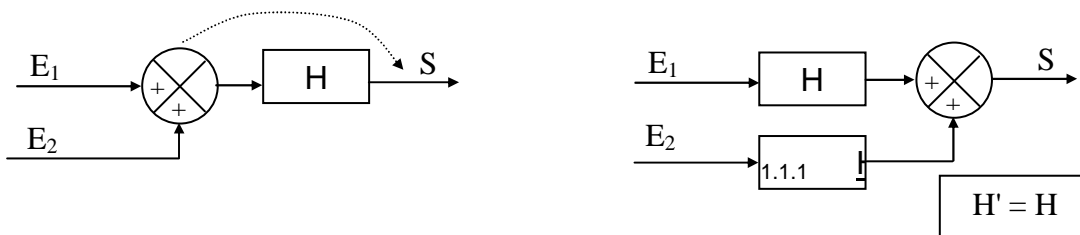
FT en parallèle



déplacement d'une jonction:



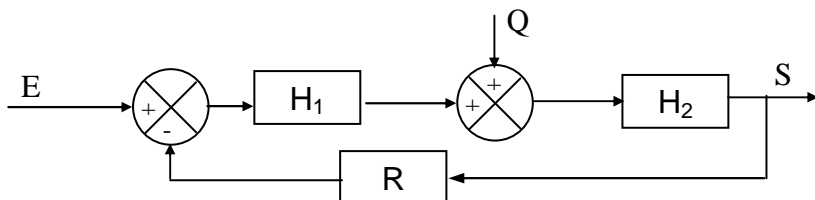
Déplacement d'un sommateur:



Cas des systèmes perturbés

Ces systèmes ont deux entrées :

- l'une est maîtrisée par l'utilisateur $E(p)$
- l'autre est imposée par le milieu extérieur $Q(p)$



Si $Q = 0$ alors on obtient $S_1 = E \cdot \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 R}$ et si $E = 0$ on obtient $S_2 = Q \cdot \frac{H_2}{1 + H_1 H_2 R}$

Le système étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition ce qui donne $S = S_1 + S_2 = E \cdot \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 R} + Q \cdot \frac{H_2}{1 + H_1 H_2 R}$

7 Systèmes linéaires fondamentaux:

7.1 Fonction de transfert

premier ordre :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)} \xrightarrow{L} \tau p S(p) + S(p) = K E(p) \Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}}$$

K = gain statique
 τ = constante de temps

deuxième ordre :

$$\boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K \omega_0^2 e(t)}$$

forme canonique avec
 K = gain statique
 ω_0 = pulsation propre
 m = coefficient d'amortissement

La transformée de Laplace de cette équation donne:

$$p^2 S(p) + 2 m \omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = K \omega_0^2 E(p)$$

d'où la fonction de transfert:

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}}$$

7.2 Réponse à un échelon

$$e_{(t)} = E_0 \cdot u_{(t)} \xrightarrow{L} E_{(p)} = \frac{E_0}{p}$$

7.2.1 Premier ordre

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Pour connaître complètement s(t), il faut décomposer S(p) en éléments simples:

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p} = E_0 \left(\frac{K}{p} - \frac{\tau K}{1 + \tau p} \right) = K E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = K E_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)}$$

- pente à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \tau p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K p}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau} \Rightarrow \text{pente à l'origine}$$

- asymptote horizontale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{1 + \tau p} = K \Rightarrow \text{asymptote horizontale de valeur } K$$

- Rapidité : temps de réponse à 5%

au bout d'un temps 3τ , la réponse atteint 95% de la valeur finale $K.E_0$:
 temps de réponse à 5% = instant t_r pour lequel $s(t_r) = 0,95 s_{\max}$

$$K(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}) = 0,95K \Rightarrow e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0,05 \Rightarrow t_r \approx 3\tau. \text{ Le temps de réponse à 5\% d'un système du premier ordre est égal à } 3\tau : t_{R5\%} = 3\tau$$

Le tracé de la réponse est donné ci-dessous :

7.2.2 Deuxième ordre

$$S(p) = \frac{K}{1 + 2.\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{E_0}{p}. \text{ Le résultat dépend des racines du dénominateur}$$

Etude des pôles de la fonction de transfert H(p) (racines du dénominateur).

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2.\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K.\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.p + p^2}$$

$$\square \xi > 1: H(p) \text{ possède deux pôles réels } \begin{cases} p_1 = -\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\omega_1 \\ p_2 = -\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\omega_2 \end{cases} \quad H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{(p + \omega_1)(p + \omega_2)}$$

$$\square \xi = 1: H(p) \text{ possède un pôle réel double } p_0 = -\omega_0 \quad H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

$$\square \xi < 1: H(p) \text{ ne possède pas de pôle réel } \quad H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.p + p^2}$$

7.2.2.1 réponse en régime apériodique ($\xi > 1$)

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K.\omega_0^2.E_0}{p(p + \omega_1)(p + \omega_2)} = K.E_0 \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p + \omega_1} + \frac{\gamma}{p + \omega_2} \right) \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{\omega_0^2}{\omega_1(\omega_2 - \omega_1)} \\ \gamma = \frac{\omega_0^2}{\omega_2(\omega_2 - \omega_1)} \end{cases}$$

$$S(p) = K.E_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{\omega_0^2}{(\omega_2 - \omega_1)} \left(\frac{1/\omega_1}{p + \omega_1} - \frac{1/\omega_2}{p + \omega_2} \right) \right]$$

Après transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega_2 - \omega_1)} \left(\frac{1}{\omega_1} e^{-\omega_1.t} - \frac{1}{\omega_2} e^{-\omega_2.t} \right) \right] \text{ pour } t > 0$$

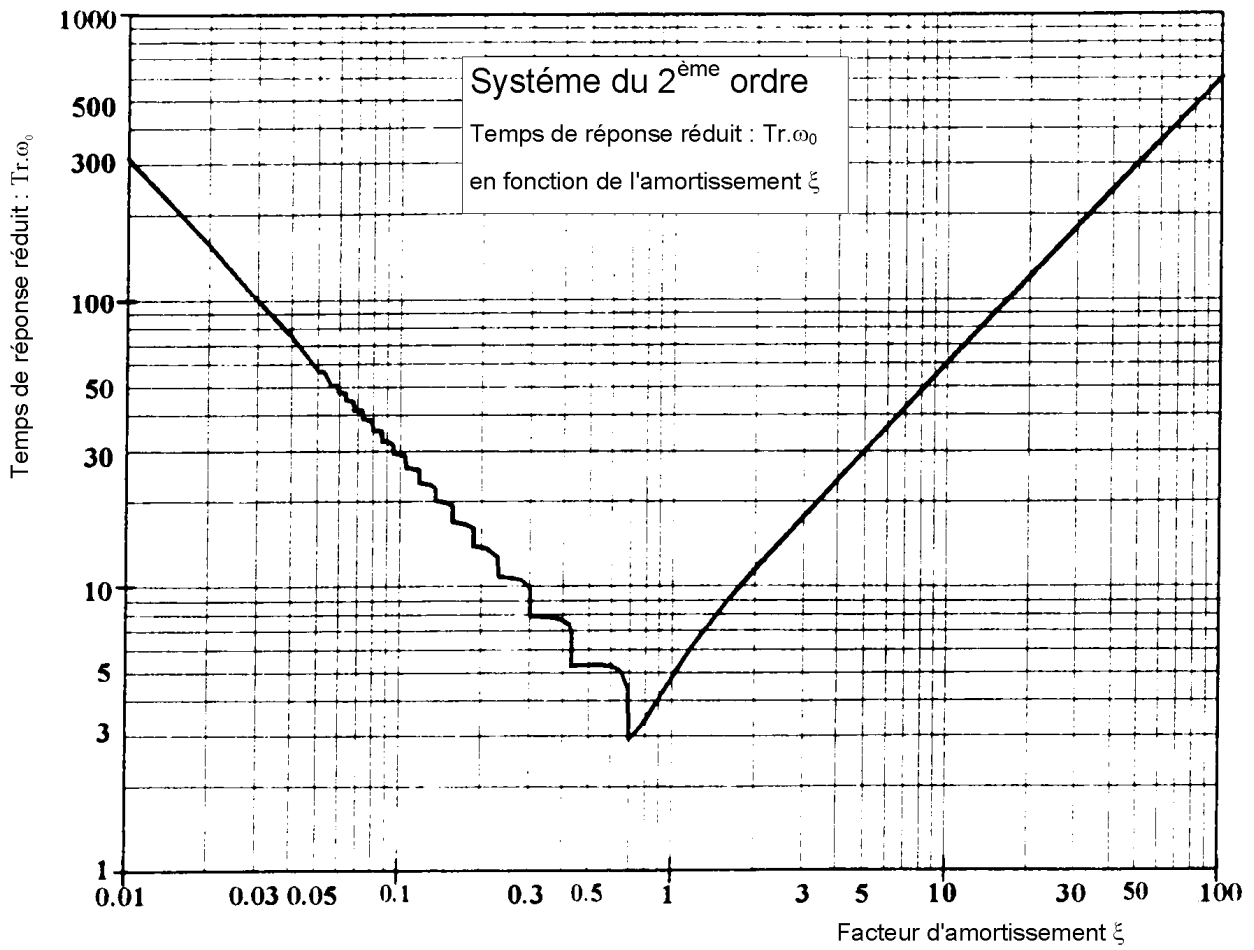
Tracé :

$$\text{➤ Valeur initiale : } s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$$

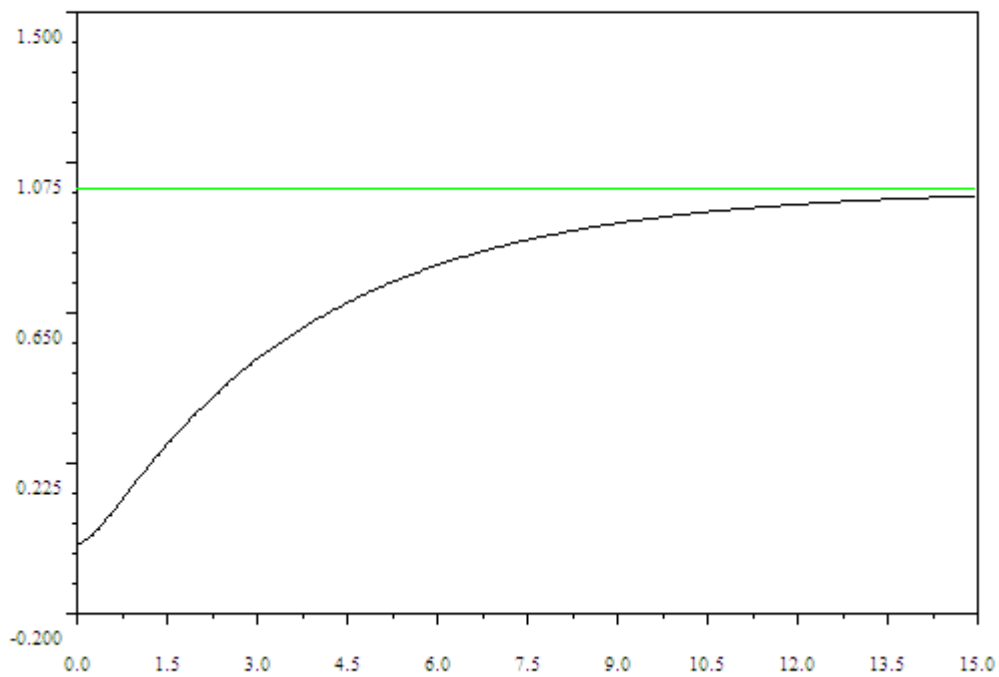
➤ Pente à l'origine :

$$\text{➤ Valeur finale : } s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$$

Temps de réponse à 5% (temps nécessaire pour que la réponse se stabilise à $\pm 5\%$ de la valeur finale) : voir courbe



exemple: réponse indicielle pour $K=1, \omega_0=1\text{rad/s}, m=2$



7.2.2.2 réponse en régime aperiodique critique ($\xi = 1$)

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2} = K.E_0 \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\omega_0} + \frac{\gamma}{(p+\omega_0)^2} \right) \text{ avec } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -\omega_0 \end{cases}$$

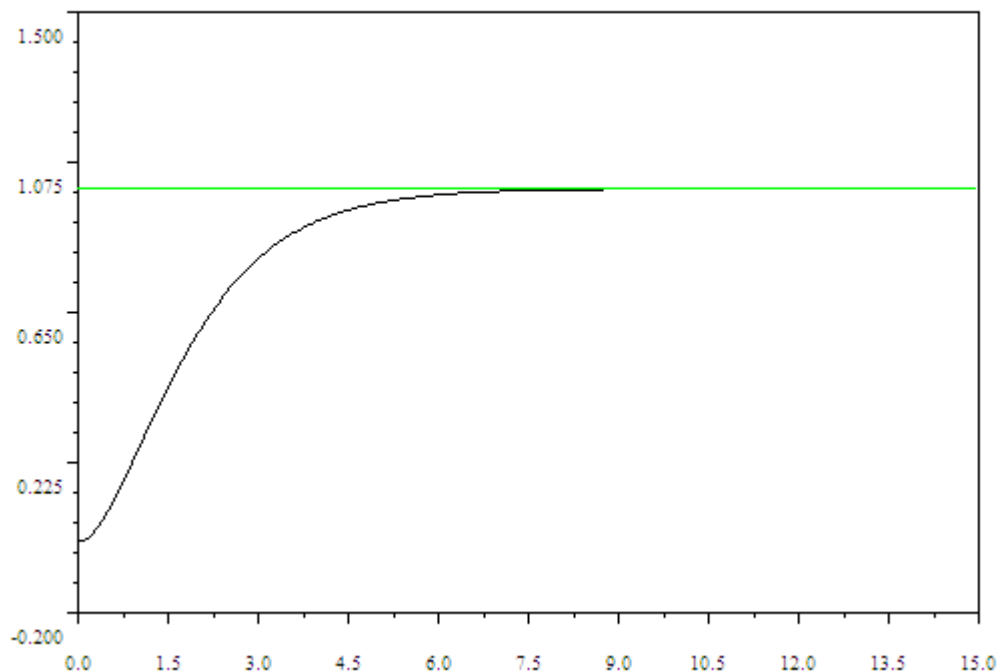
$$S(p) = K.E_0 \left[\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p+\omega_0} + \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2} \right) \right]$$

Après transformée de Laplace inverse : $s(t) = K.E_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]$ pour $t > 0$

Tracé :

- Valeur initiale : $s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$
- Pente à l'origine : $s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s'(t) = 0$
- Valeur finale : $s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$
- Dépassement : aucun
- Temps de réponse à 5% (temps nécessaire pour que la réponse se stabilise à $\pm 5\%$ de la valeur finale) : voir courbe

Exemple : réponse indicielle pour $K=1$, $\omega_0=1\text{rad/s}$, $m=1$



7.2.2.3 réponse en régime pseudo périodique ($\xi < 1$)

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p(\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.p + p^2)} = K.E_0 \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta.p + \gamma}{\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.p + p^2} \right) \text{ avec } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -2.\xi.\omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(p) &= K.E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2.\xi.\omega_0}{\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.p + p^2} \right) \\ &= K.E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2.\xi.\omega_0}{(p + \xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \right) \\ &= K.E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi.\omega_0}{(p + \xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}{(p + \xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \right) \end{aligned}$$

en posant $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ et après transformée de Laplace inverse :

$$\begin{aligned} s(t) &= K.E_0 \left[1 - \left(\cos(\Omega_0 t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\Omega_0 t) \right) e^{-\xi.\omega_0.t} \right] \text{ pour } t > 0 \\ &= K.E_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\Omega_0 t) + \xi \sin(\Omega_0 t) \right) e^{-\xi.\omega_0.t} \right] \text{ pour } t > 0 \end{aligned}$$

en posant : $\begin{cases} \xi = \cos \varphi \\ \sqrt{1 - \xi^2} = \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\Omega_0 t + \varphi) \right] \text{ pour } t > 0$

➤ Valeur initiale : $z(0) = \lim_{t \rightarrow 0} z(t) = 0$

➤ Pente à l'origine : $s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s'(t) = 0$

➤ Valeur finale : $s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$

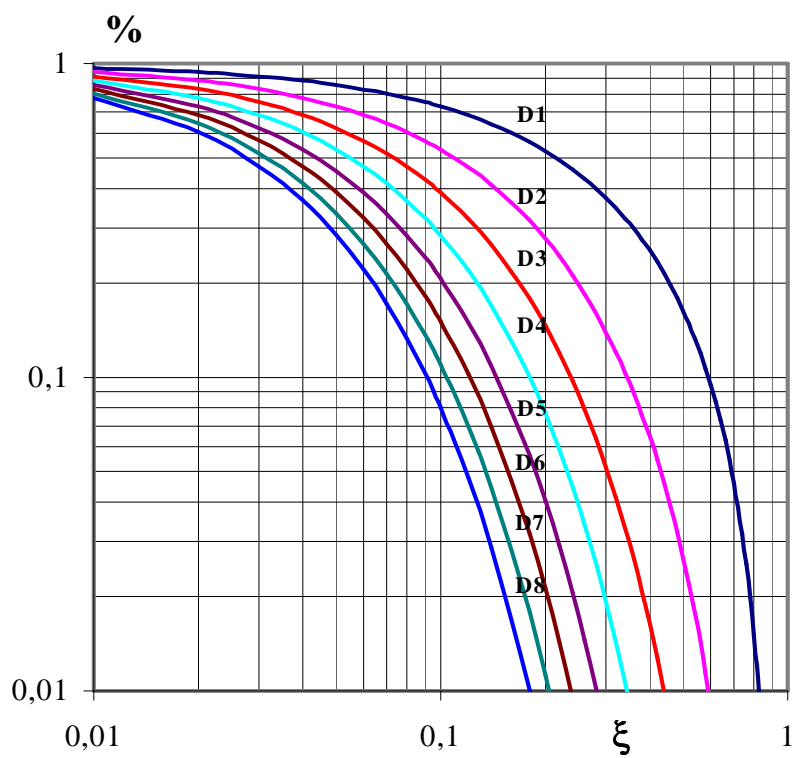
➤ Temps de réponse à 5% (temps nécessaire pour que la réponse se stabilise à $\pm 5\%$ de la valeur finale) : voir courbe

❖ pour $\xi < 1$

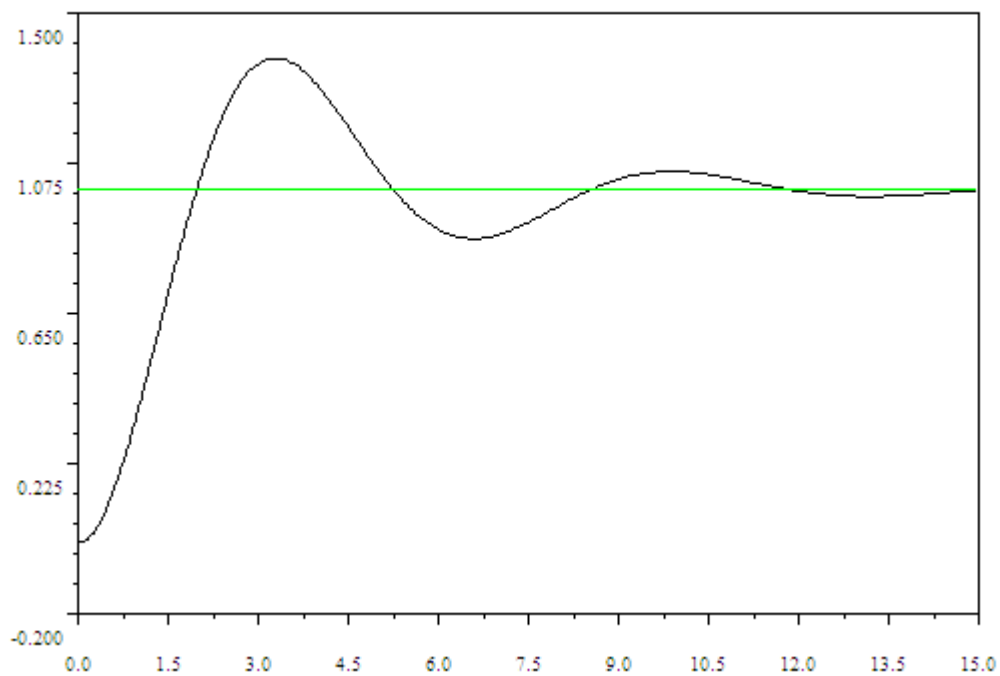
➤ pseudo période : $T = \frac{2.\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$

➤ date des extréma $t_k = \frac{k.\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ k : entier naturel

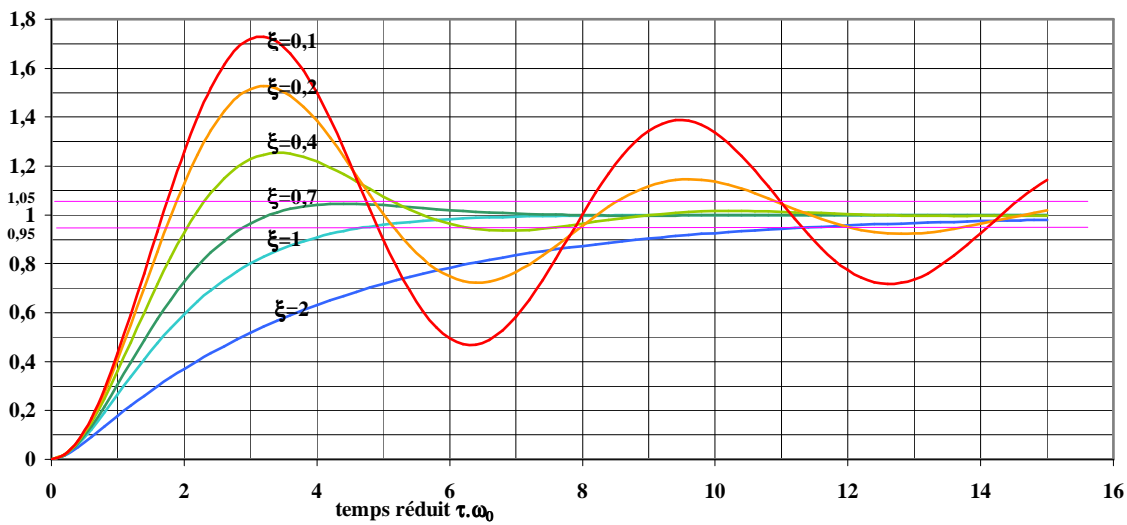
➤ distance des extréma à la valeur finale : $D_k = e^{-\frac{k.\pi.\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} (\%)$

dépassement transitoire

Exemple : réponse indicielle pour $K=1$, $\omega_0=1\text{rad/s}$, $m=0.3$



Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre



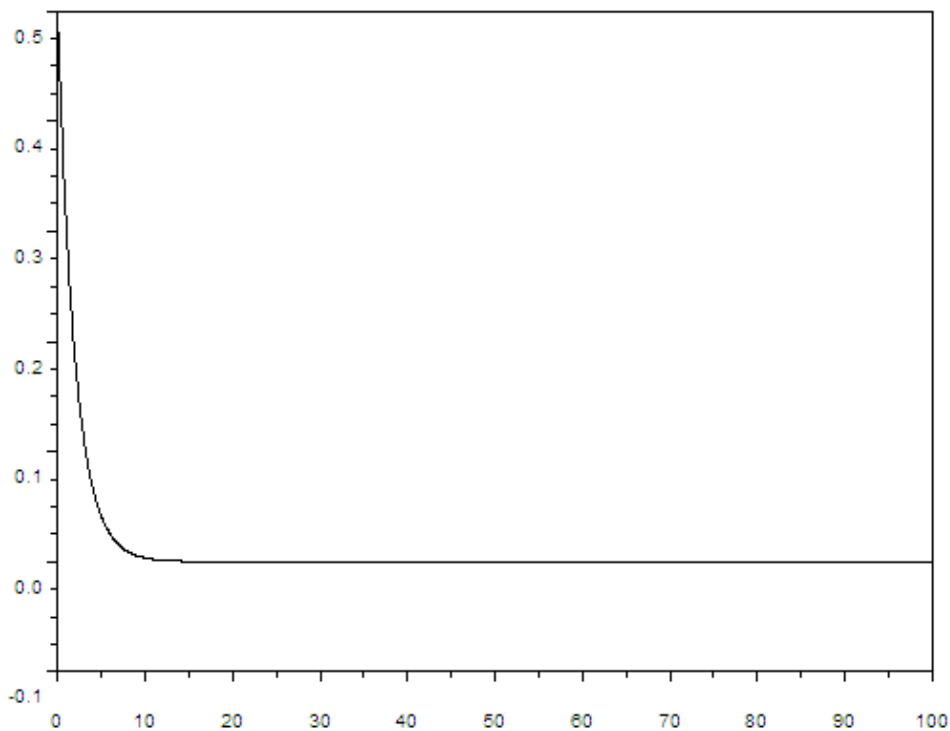
7.3 Réponse à une impulsion

$e(t)=\delta(t)$ $L(\delta(t))=1$

7.3.1 Réponse à une impulsion pour un modèle du premier ordre

$S(p)=\frac{K}{1+\tau \cdot p} = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}$ d'où $s(t)=\frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Exemple K=1 et tau =2



7.3.2 Réponse à une impulsion pour un modèle du deuxième ordre

$$E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K \omega_0^2}{D(p)}$$

avec $D(p)$ de discriminant réduit $\Delta' = m^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(m^2 - 1)$

- premier cas: $m > 1 \Rightarrow D(p)$ a alors 2 racines réelles p_1 et p_2

$$p_1 = -m \omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -m \omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{avec} \quad p_1 < p_2 < 0$$

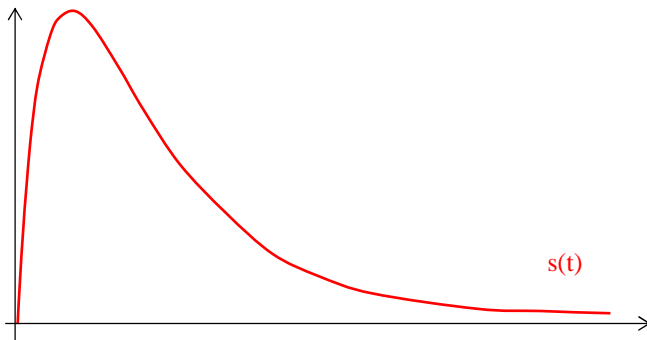
La décomposition en éléments simple donne :

$$S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = K \omega_0^2 \left(\frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{p - p_2} \right) = \frac{K \omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(-\frac{1}{p - p_1} + \frac{1}{p - p_2} \right)$$

d'où

$$s(t) = \frac{K \omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) u(t)$$

\Rightarrow système amorti (régime apériodique) : il n'y a pas de dépassement



- deuxième cas: $m < 1 \Rightarrow D(p)$ a alors 2 racines complexes conjuguées

$$p_1 = -m \omega_0 - j \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -m \omega_0 + j \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$\text{De plus} \quad S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$\text{On peut alors écrire } S(p) \text{ sous la forme: } S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)}$$

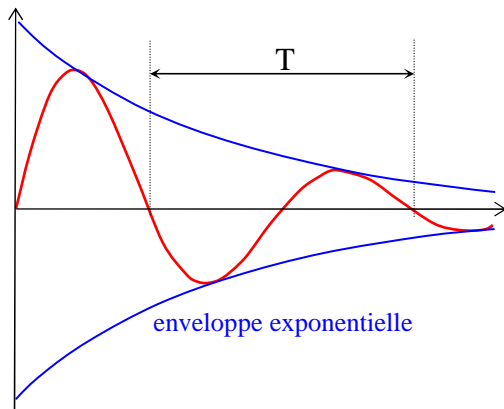
$$\text{soient } \omega^2 = \omega_0^2(1 - m^2) \quad \text{et} \quad a = m \omega_0 \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K \omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

d'où

$$s(t) = \frac{K \omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t) u(t)$$

\Rightarrow système sous-amorti (régime pseudo-périodique)

$$\text{La pseudo-période des oscillations vaut } T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$$



Lorsqu'il n'y a pas d'amortissement ($m = 0$), on a une réponse sinusoïdale de pulsation ω_0 (ce qui justifie le nom de pulsation propre donné à ω_0).

- troisième cas: $m=1 \Rightarrow D(p)$ a alors une racine double.

L'allure de la réponse serait comparable à celle obtenue dans le cas du régime aperiodique mais ce cas est impossible dans la réalité: on ne peut avoir une valeur réelle de m exactement égale à 1!

7.4 Réponse à une rampe

7.4.1 Premier ordre

$$e(t) = a t u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{a K}{p^2 (1 + \tau p)}$$

- pente à l'origine

$$s'(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S'(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \frac{Ka}{p^2(1+\tau p)} = 0$$

- asymptote

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \text{ tend vers } K a \cdot (t - \tau), \text{ (le terme } \tau \cdot e^{-t/\tau} \text{ est pratiquement éteint au bout de } 4\tau \text{).}$$

- $s(t)$

Pour connaître complètement $s(t)$, il faut décomposer $S(p)$ en éléments simples:

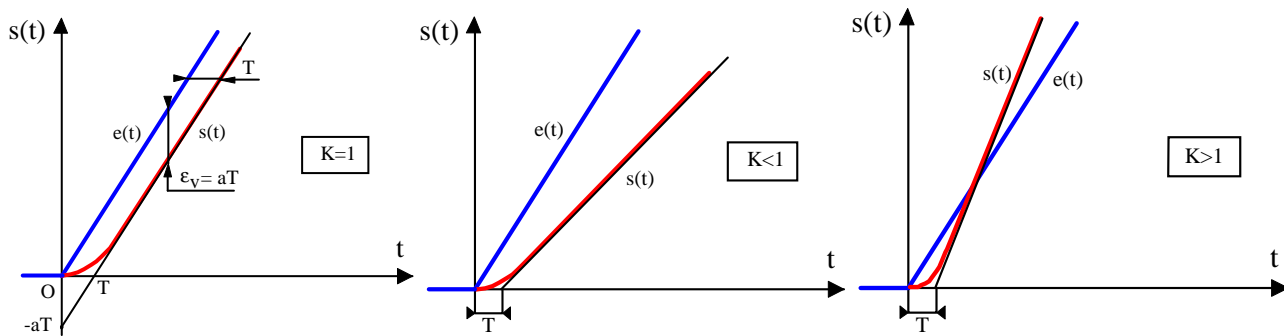
$$S(p) = \frac{a K}{p^2 (1 + \tau p)} = K \left(\frac{a}{p^2} - \frac{a \tau}{p} + \frac{a \tau^2}{1 + \tau p} \right) \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = a K \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)}$$

- Ecart de traînage ε_v :

$$\text{Pour } K=1 \quad \varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)] = a \tau$$

Pour $K \neq 1$ ε_v va varier

- $s(t) = 0$ pour $t = 0$



7.4.2 Deuxième ordre

Avec $e(t) = a \cdot u(t)$, soit $E(p) = \frac{a}{p^2}$, on a $S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{Ka}{p^2 \cdot (1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2})}$

De la même manière que précédemment, la décomposition de $S(p)$ dépend des racines du dénominateur $D(p)$, donc de z . La réponse est fonction de s_1 qui dépend de z :

- Cas $z > 1$: régime aperiodique

La réponse temporelle est $s(t) = Ka \left[t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1^2 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2^2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right] \cdot u(t)$

avec $T_1 = \frac{1}{\omega_n (z - \sqrt{z^2 - 1})}$ et $T_2 = \frac{1}{\omega_n (z + \sqrt{z^2 - 1})}$

- Cas $z = 1$: régime aperiodique critique

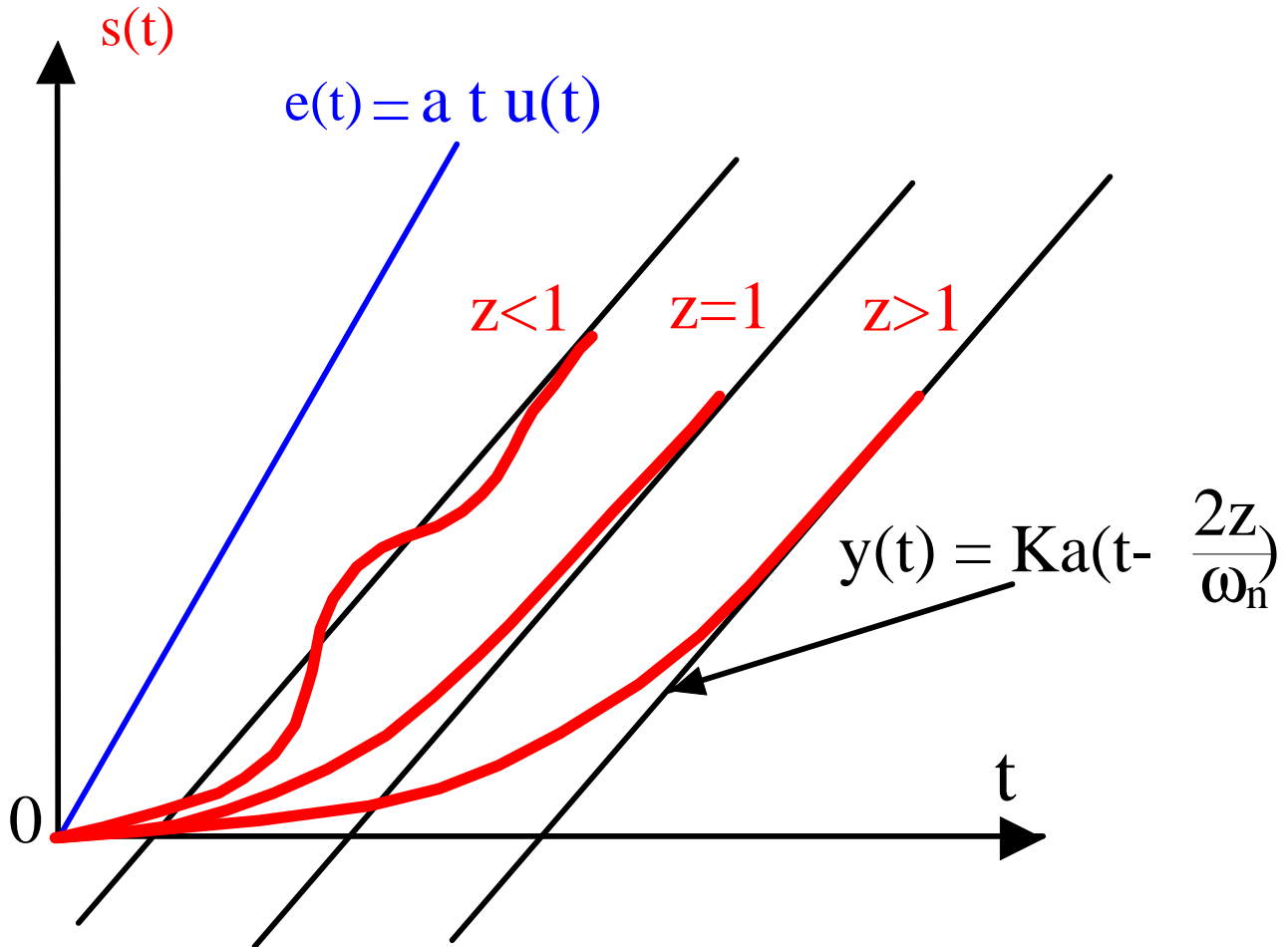
$s(t) = Ka \left[t - 2T + (t + 2T) e^{-\frac{t}{T}} \right] \cdot u(t)$ avec $T = \frac{1}{\omega_n}$

- Cas $z < 1$: régime oscillatoire

$s(t) = Ka \cdot \left[t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - z^2} \cdot t + \Phi \right] \cdot u(t)$ avec $\Phi = 2 \text{Arc tan} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$

- L'allure de la réponse temporelle ressemble à celle du premier ordre en régime permanent.
- La réponse tend asymptotiquement vers une droite d'équation $Ka \cdot \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right)$.
- L'écart de traînage ϵ_v tend vers l'infini lorsque K est différent de 1 : le système ne suit pas.
- L'écart de traînage ϵ_v tend vers $\frac{2za}{\omega_n}$ lorsque $K=1$.

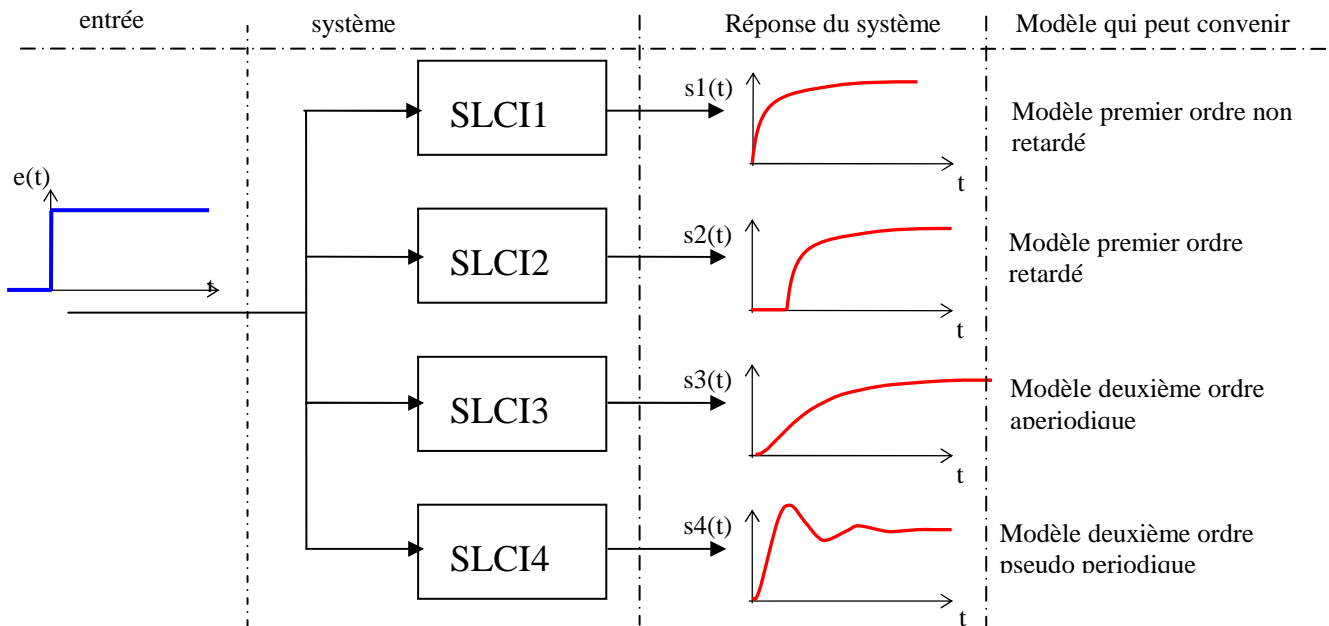
Il augmente proportionnellement à l'amortissement et inversement proportionnellement à la pulsation non amortie.



8 Identification d'un modèle de comportement à partir d'une réponse à un échelon

8.1 Principe

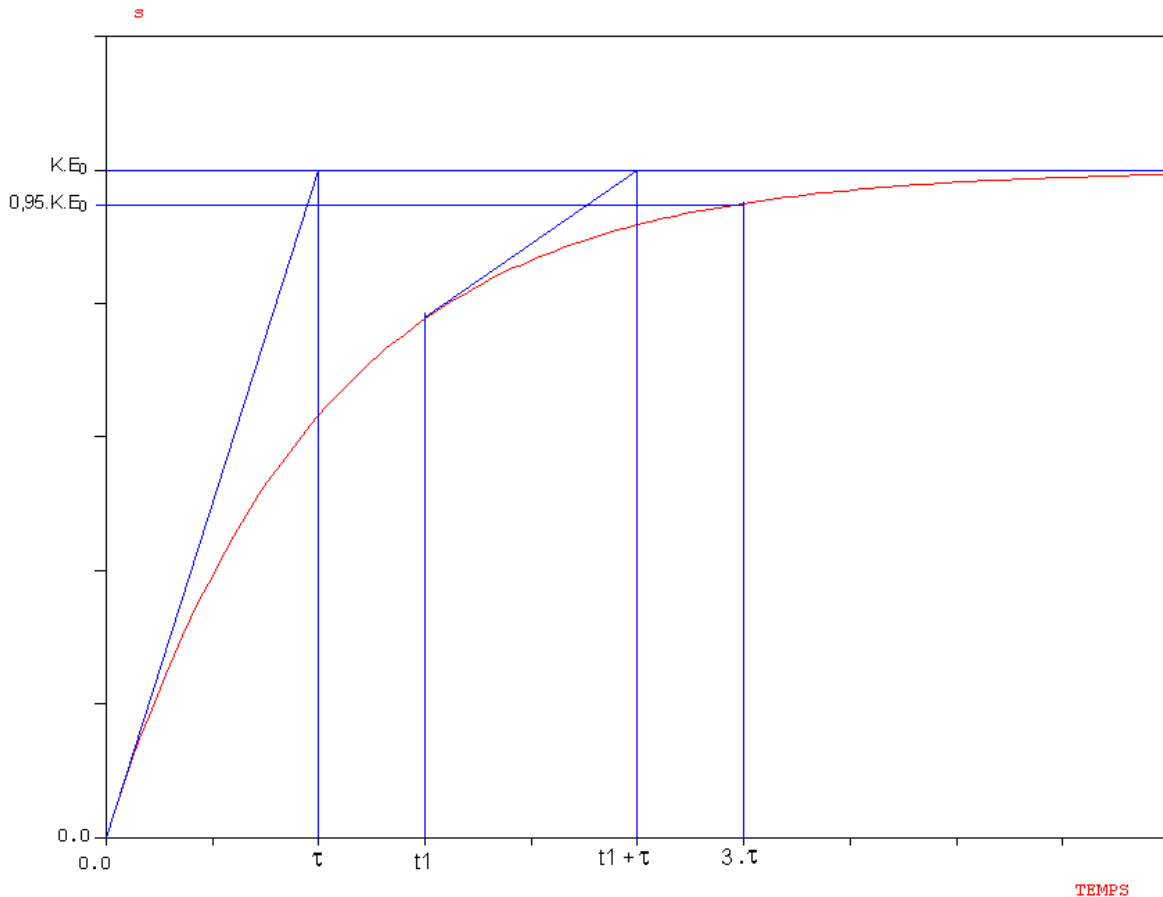
Lorsque les lois de comportement ne sont pas connues ou trop complexes, on peut procéder à des identifications de courbes de réponse.



Lorsque le choix du modèle est effectué, il faut identifier les différents paramètres

8.2 Identification d'un premier ordre non retardé

La réponse d'un système du 1^{ier} ordre à un échelon d'amplitude E_0 est définie par l'équation : $s(t) = K.E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$ où $u(t)$ représente la fonction échelon unitaire.



1) **Détermination du gain K** : Il se lit directement sur la courbe réponse car $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$

2) **Détermination de la constante de temps τ** :

- Par la tangente à l'origine $\left(\text{pente } \frac{K.E_0}{\tau}\right)$ ou en tout point de la courbe réponse .

Appelons $y(t)$ la fonction qui définit la tangente à la courbe à l'instant t_1 :

$$y(t) = s'(t_1)(t - t_1) + s(t_1) = \frac{K.E_0}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}} (t - t_1) + K.E_0 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)$$

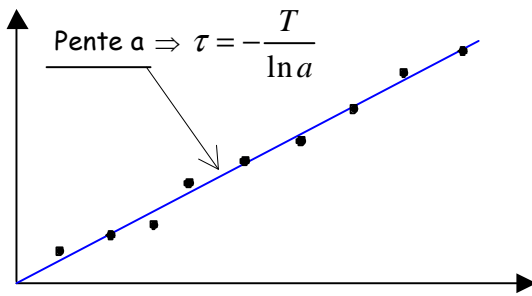
Calculons l'instant (t_2) où cette droite coupe l'asymptote $K.E_0$:

- Par le temps de réponse à 5% : $Tr_{5\%} \approx 3.\tau$

si la réponse est trop perturbée pour tracer la tangente ou évaluer le temps de réponse on peut procéder comme ci-dessous : on trace en fonction de :

$$\Rightarrow s_c(t+T) = K.E_0 - K.E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{T}{\tau}}\right) = K.E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot s_c(t)$$

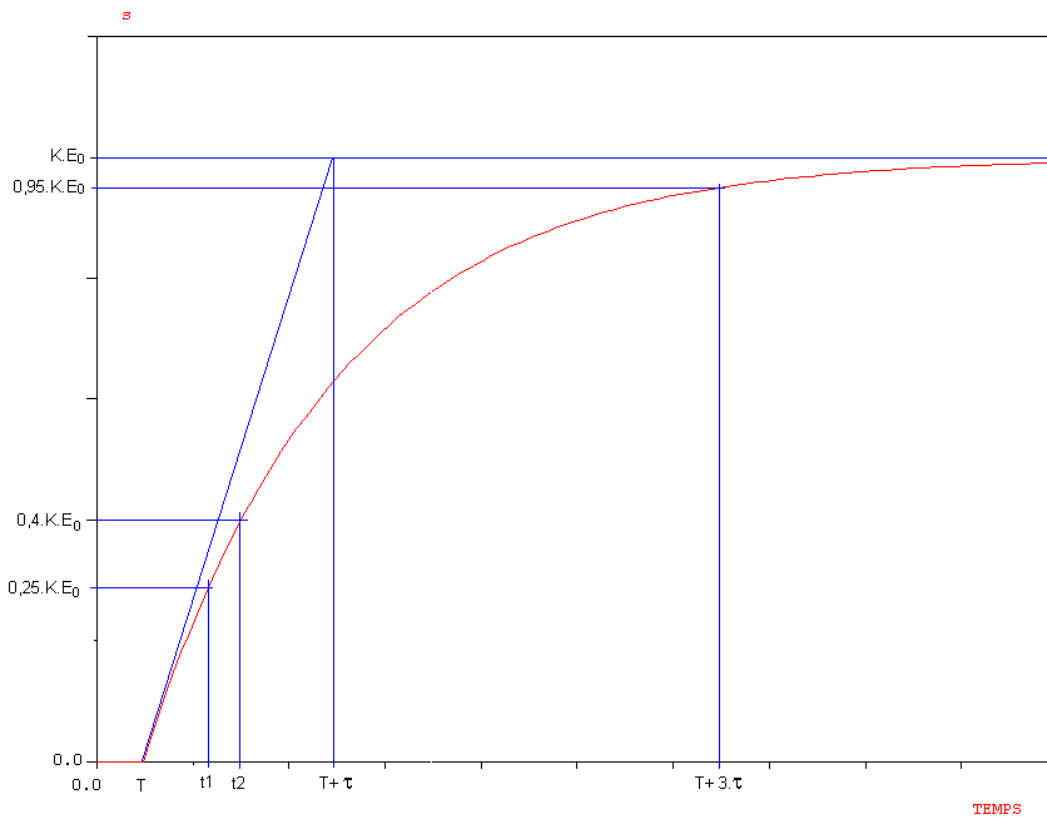
Il s'agit d'une droite de coefficient directeur $e^{-\frac{T}{\tau}}$



8.3 Identification d'un premier ordre retardé

La réponse d'un système du 1^{ier} ordre retardé à un échelon d'amplitude E_0 est définie par l'équation :

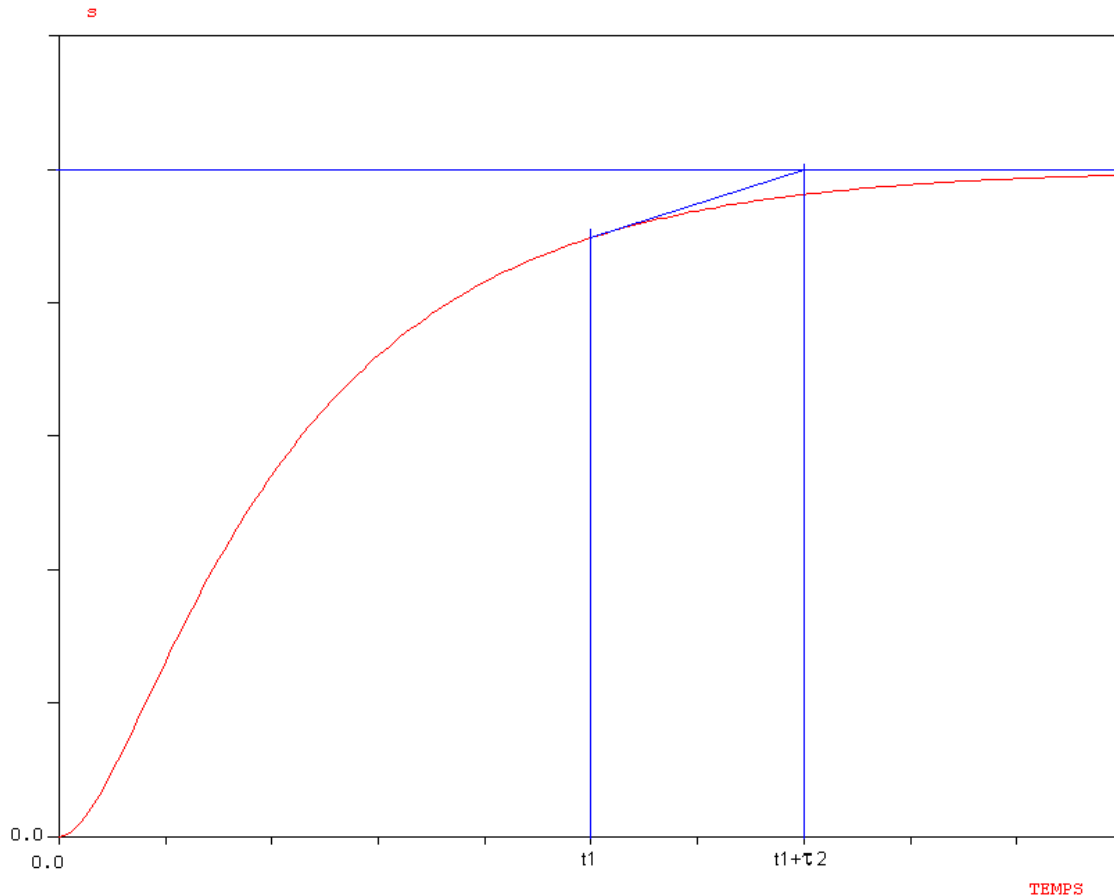
$$s(t) = K.E_0 \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}} \right) u(t-T) \text{ où } u(t-T) \text{ représente l'échelon unitaire retardé de l'instant } T.$$



8.4 Identification par un 2^{ème} ordre apériodique

La réponse d'un système du 2^{ème} ordre apériodique à un échelon d'amplitude E_0 est définie par l'équation :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \cdot u(t) \text{ on supposera } \tau_2 > \tau_1$$



❖ **Détermination du gain K** : Il se lit directement sur la courbe réponse car $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$

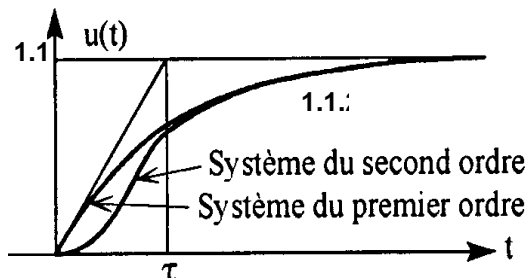
❖ **Détermination des constantes de temps τ_1 et τ_2** :

- Si $\tau_1 \ll \tau_2$ on fera le choix d'une modélisation par un premier ordre retardé.
- A l'instant t_1 (bien après le point d'inflexion) on peut déterminer τ_2 par l'étude de la tangente à la courbe et τ_1 en

mesurant la sortie $s(t_1) \approx K.E_0 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t_1}{\tau_2}} \right)$

- Si la réponse est perturbée, on peut utiliser une méthode similaire à celle employée pour le 1^{er} ordre (mise en œuvre plus délicate et résultats moins nets).

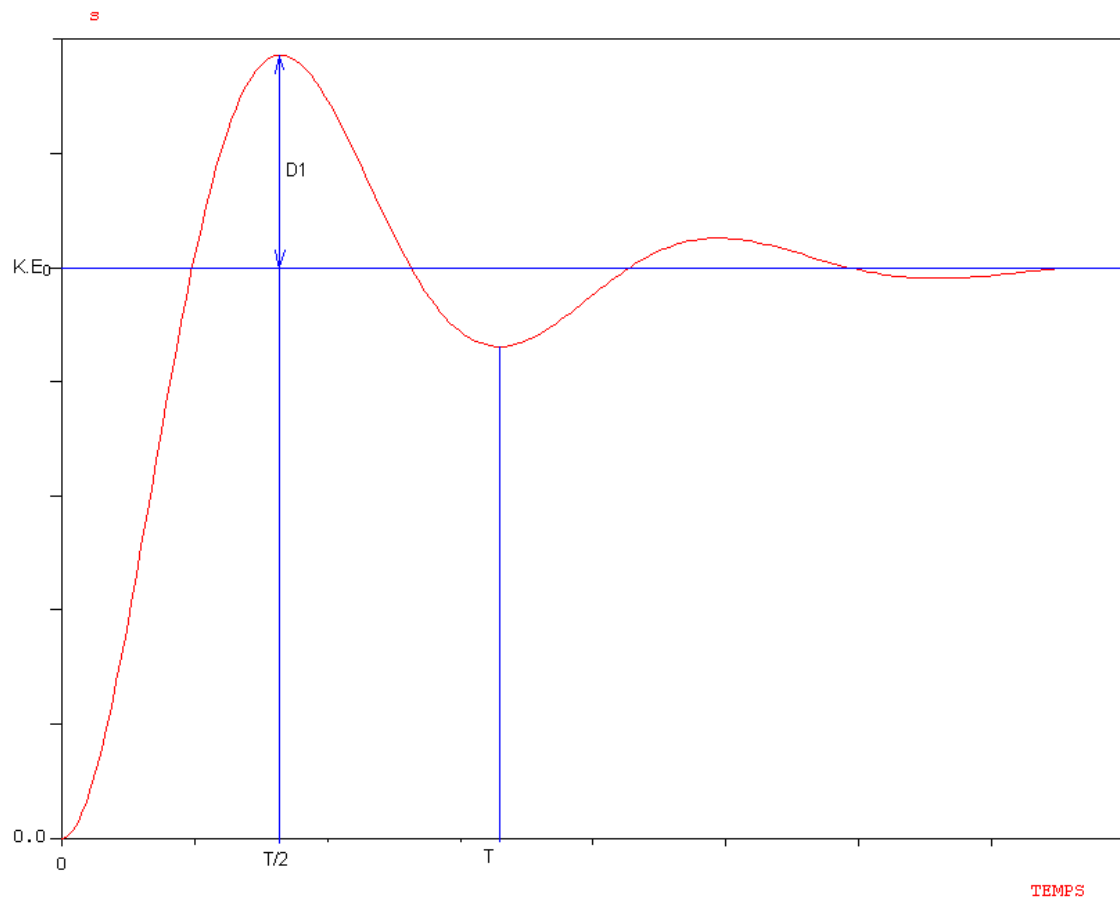
Dès qu'on s'éloigne de $t = 0$, le système du second ordre est comparable à un premier ordre. Au début de l'évolution, le premier ordre réagit plus vite (pente à l'origine non nulle)



8.5 Identification par un 2^{ème} ordre pseudopériodique

La réponse d'un système du 2^{ème} ordre pseudopériodique à un échelon d'amplitude E_0 est définie par l'équation :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{e^{-z.\omega_0.t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right) \right] u(t).$$



❖ **Détermination du gain K** : Il se lit directement sur la courbe réponse car $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K.E_0$

❖ **Détermination du coefficient d'amortissement z** : $D1 = e^{-\frac{\pi \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}} \quad (\%)$

❖ **Détermination de la pulsation propre ω_0** : $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

9 Analyse harmonique

9.1 Principes

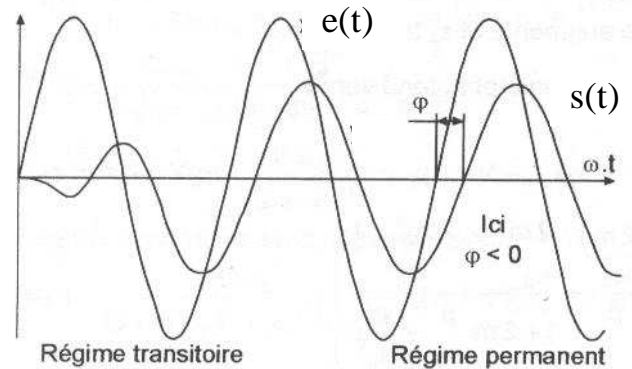
L'analyse harmonique d'un système consiste à lui appliquer une entrée $e(t)$ sinusoïdale, notée $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Vocabulaire :

- E_0 est l'amplitude du signal, d'unité celle de $e(t)$, positive
- ω est la pulsation en **rad/s** ou avec $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$, définie en donnant la fréquence f en Hz ou la période T en seconde (s)

Dans le cas d'un système stable, une fois le régime permanent atteint, la sortie $s(t)$ est également sinusoïdale, de même pulsation. On note alors :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Pour plus de simplicité, comme en physique, nous introduisons les notations complexes :

$$\begin{cases} \bar{e}(t) = E_0 e^{j\omega t} \\ \bar{s}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} e(t) = \text{Im}(\bar{e}(t)) \\ s(t) = \text{Im}(\bar{s}(t)) \end{cases}$$

Nous avons alors clairement :

$$\frac{\bar{s}(t)}{\bar{e}(t)} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi}$$

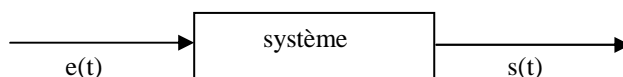
L'analyse harmonique s'intéresse donc aux deux quantités :

* $\left| \frac{\bar{s}(t)}{\bar{e}(t)} \right| = \frac{S_0}{E_0}$, rapport des amplitudes

* $\arg\left(\frac{\bar{s}(t)}{\bar{e}(t)}\right) = \varphi$, déphasage entre la sortie et l'entrée.

Rappel :

Un système dynamique, continu, linéaire, invariant, monovariante est décrit par une équation différentielle linéaire, à coefficients constants de la forme suivante :



$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t).$$

Les systèmes physiques vérifient toujours $n \geq m$

En remplaçant les fonctions temporelles par les fonctions complexes, on trouve

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n} = \frac{s(t)}{e(t)}$$

conclusion:

Lorsqu'un système stable est sollicité par un signal sinusoïdal, la sortie est également sinusoïdale, les pulsations sont les mêmes et :

- Le rapport des amplitudes est le module de la fonction de transfert

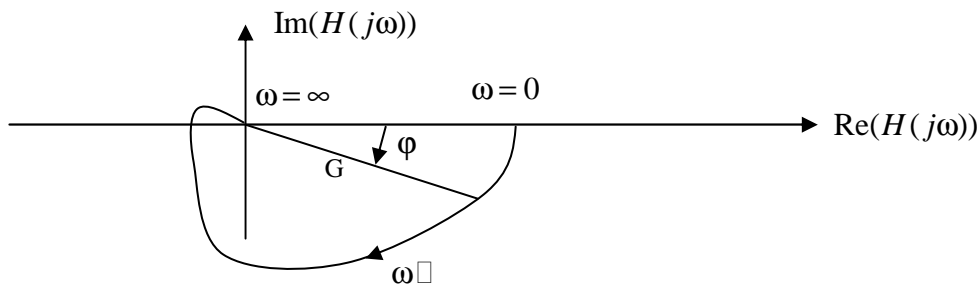
$$\text{harmonique : } \frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$$

- Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est l'argument de la fonction de transfert harmonique : $\varphi = \arg(H(j\omega))$

9.2 Lieux de transfert

Les lieux de transfert sont des représentations graphiques de $H(j\omega) = \frac{S_0}{E_0}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

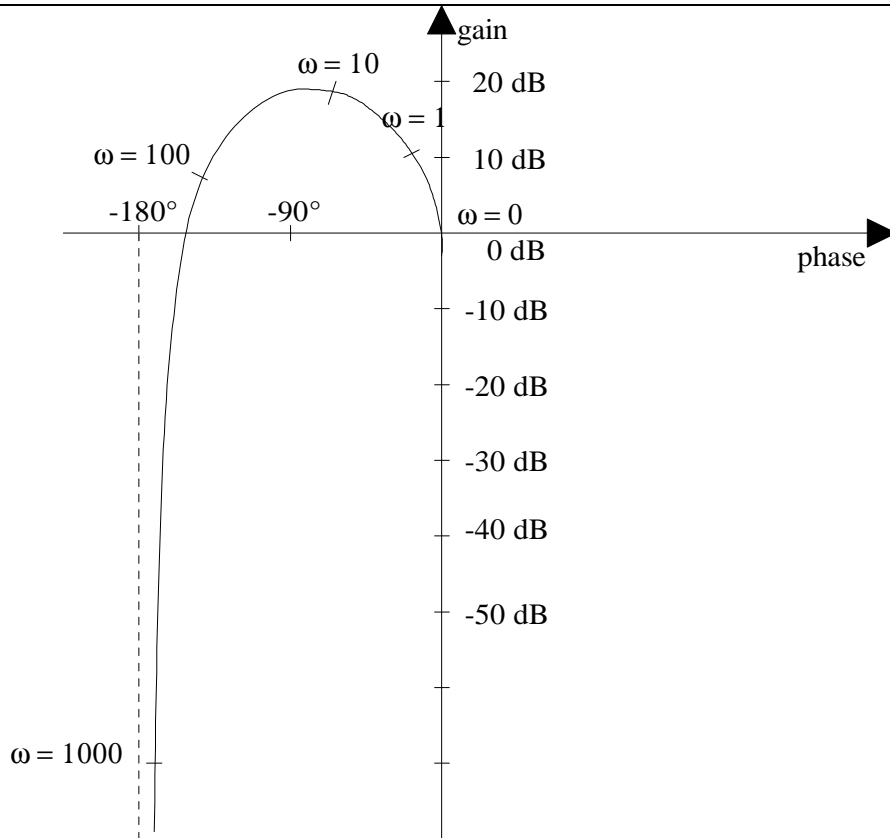
9.2.1 Lieu de Nyquist (information)



C'est la représentation dans le plan complexe de $H(j\omega)$.

9.2.2 Lieu de Black (information)

Ce diagramme en coordonnées cartésiennes présente en abscisse la phase $\varphi(\omega)$ en degrés et en ordonnée le gain G_{dB} en décibels. Comme le lieu de Nyquist, le lieu de Black doit être gradué en fréquence ou en pulsation.



9.2.3 Lieux de Bode (fondamental)

Il s'agit de 2 courbes graduées, dont les abscisses sont des axes gradués en log, c'est à dire $\log(\omega)$, qui donnent :

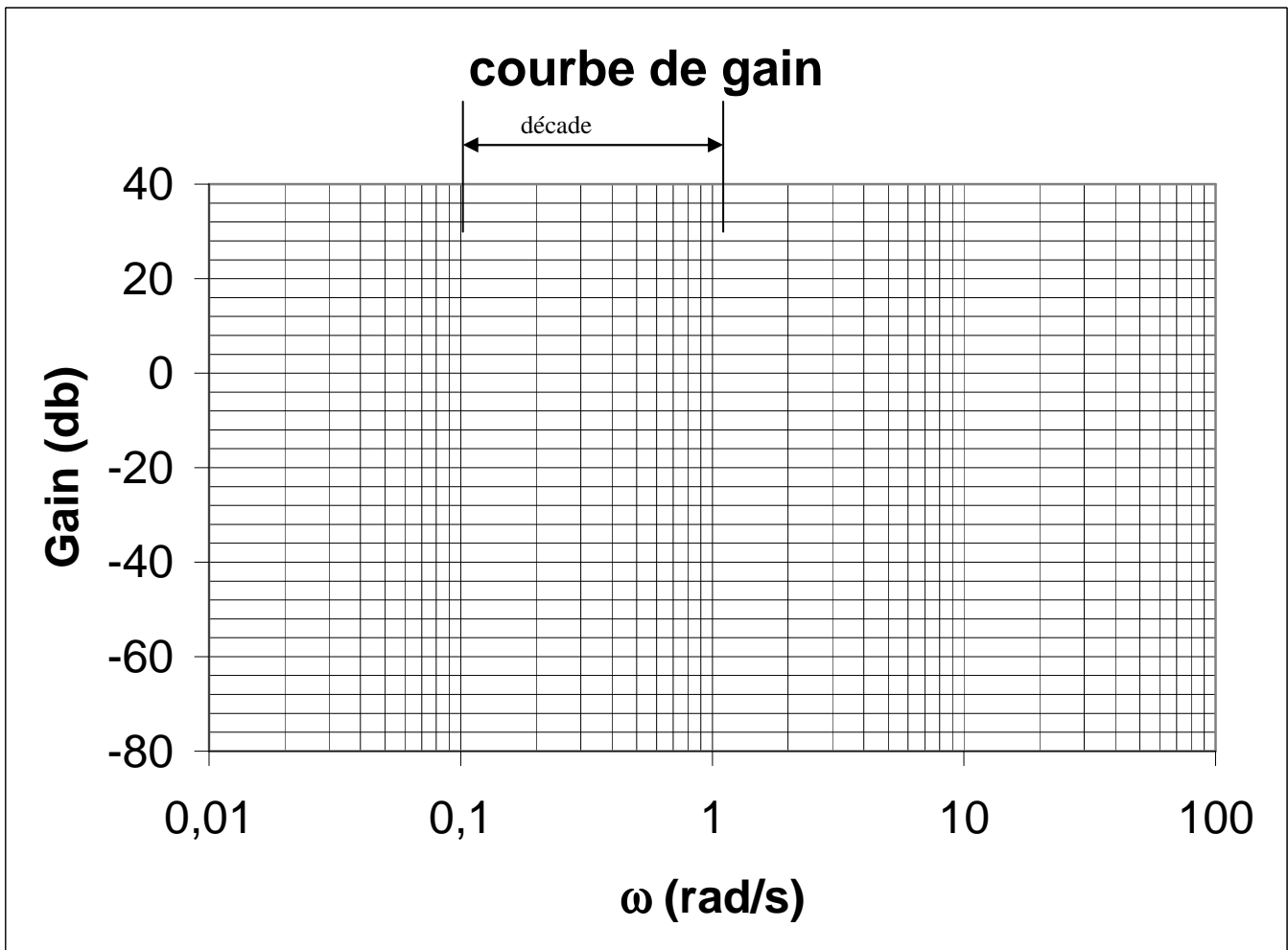
- Le gain $|H(j\omega)|$ exprimé en dB, c'est à dire :

$$G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|)$$
- La phase $\arg(H(j\omega))$, exprimée en degrés ou en radians

Une exploitation complète nécessitant une vision simultanée des deux courbes, elles figurent sur un même graphique.

Remarque Intérêt de l'échelle log

- Un des intérêts de l'utilisation du logarithme pour le module est que le produit des modules est remplacé par une somme. Par conséquent la représentation d'une fonction de transfert complexe pourra être effectuée facilement à partir d'un produit de termes élémentaires.
- De la même manière, l'argument sera obtenu facilement en faisant la somme des arguments des termes élémentaires.
- L'axe des abscisses est gradué sur une échelle logarithmique pour simplifier la représentation de la courbe de gain (termes en $\text{Log}(\omega)$) et pour pouvoir représenter une grande plage de mesure.



Une décade correspond à une multiplication par 10 en pulsation.

Propriétés des diagrammes de Bode

Produit de fonctions de transfert :

Supposons que $H(j\omega) = F(j\omega)G(j\omega)$ alors : $|H(j\omega)| = |F(j\omega)||G(j\omega)|$

En conséquence, nous avons :

$$\blacksquare \quad 20\log(|H(j\omega)|) = 20\log(|F(j\omega)|) + 20\log(|G(j\omega)|)$$

Les courbes de gain s'additionnent.

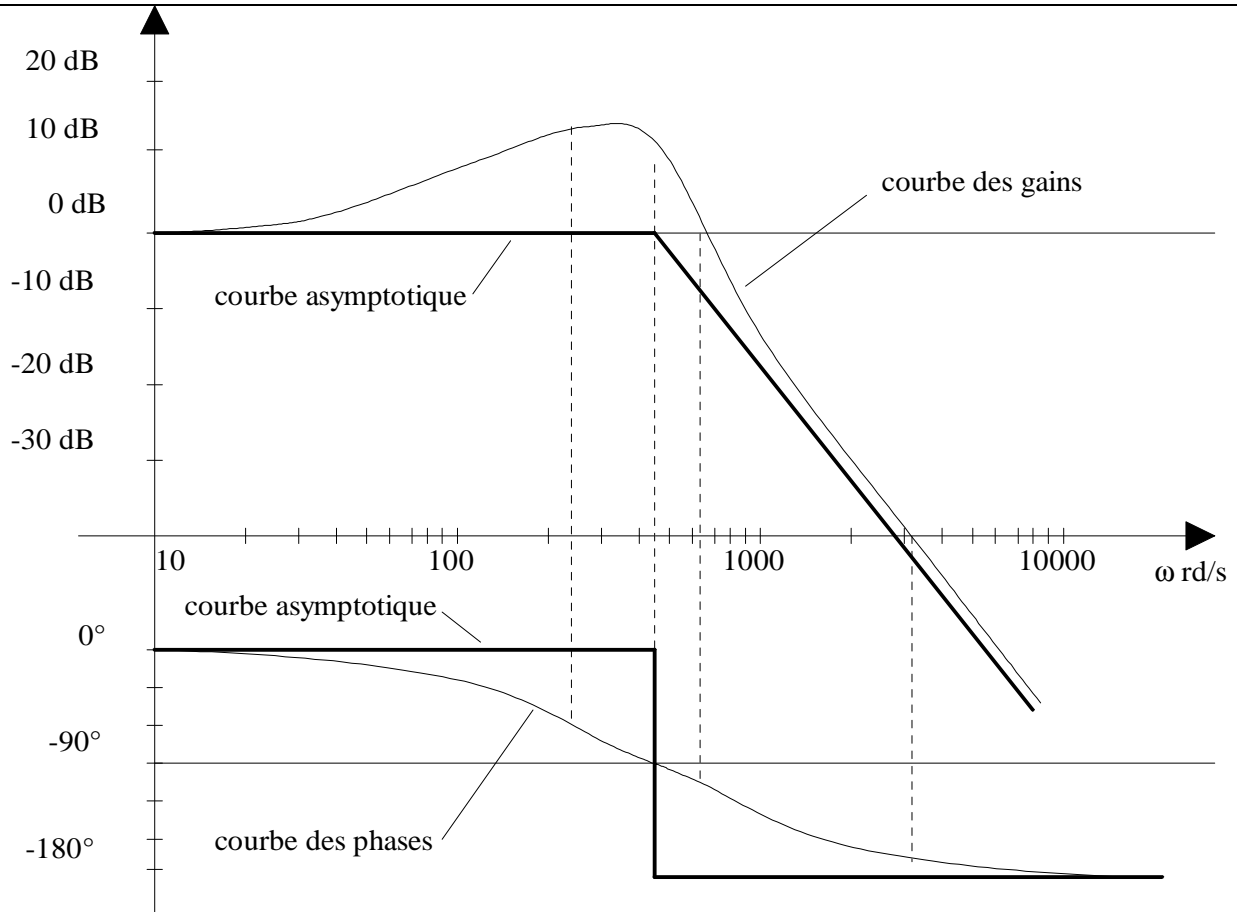
$$\blacksquare \quad \arg(H(j\omega)) = \arg(F(j\omega)) + \arg(G(j\omega))$$

Les courbes de phase s'additionnent.

Tracés asymptotiques :

Ce diagramme est dérivé du diagramme de Bode en remplaçant les courbes par leurs approximations asymptotiques. Plus clairs, ces diagrammes permettent d'apprécier globalement le comportement du système modélisé à 10 % ou 20 % près: compte tenu des imprécisions sur les valeurs réelles des paramètres du modèle, une telle précision s'avère souvent suffisante.

Les calculs se font pour $\omega \ll \omega_0$; $\omega = \omega_0$; $\omega \gg \omega_0$



9.3 Premier ordre

Reprenons $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$. Nous avons alors $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

Tracé réel

En général il est long et fastidieux. Des logiciels le font très bien (Voir Didacsyde)
 Si l'on veut tracer le lieu réel (courbes lissées sur les tracés ci-dessus), on exprime analytiquement le gain et la phase de la fonction de transfert harmonique.

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad \text{et d'autre part :}$$

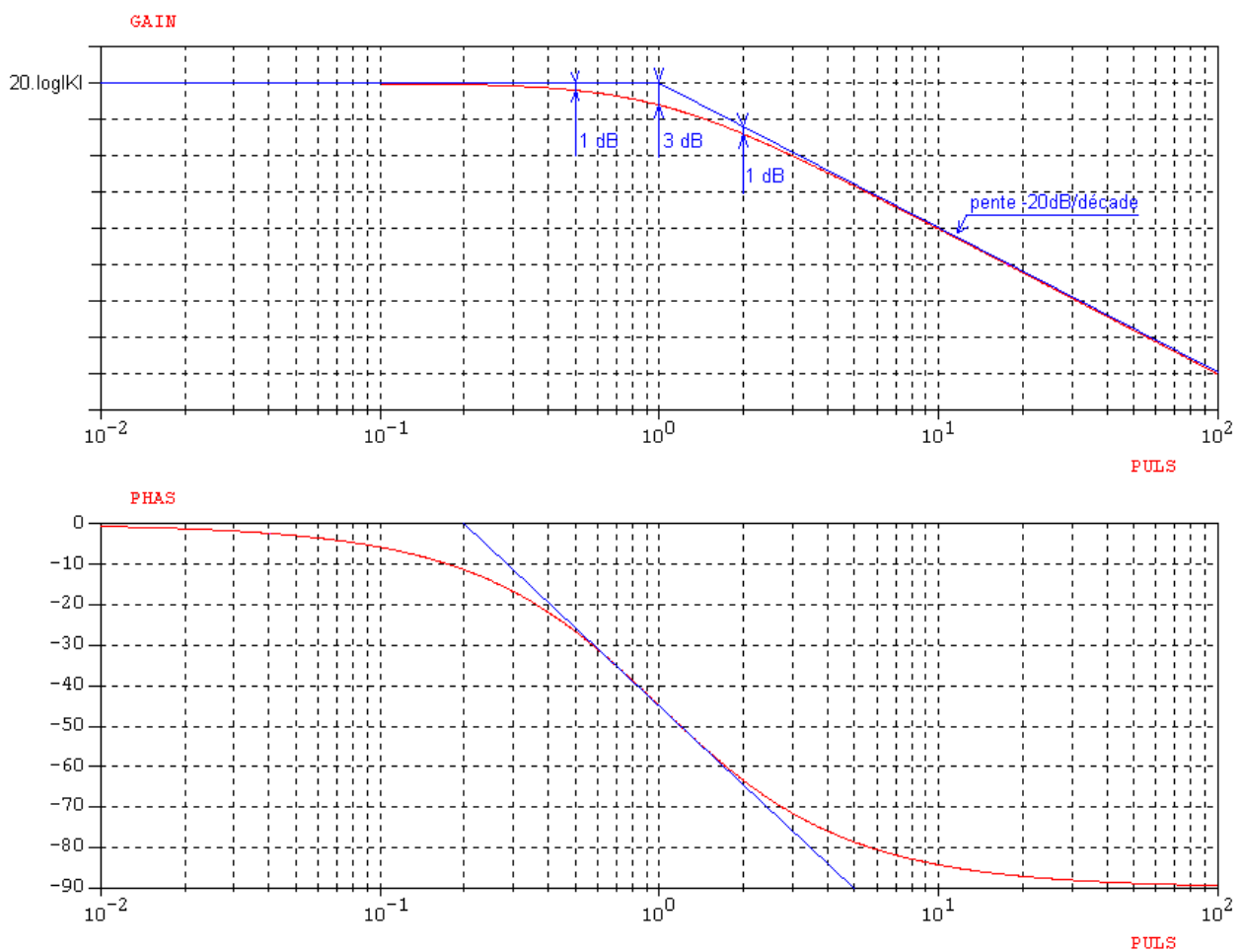
$$G_{dB} = 20 \log K - 10 \log(1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2)$$

$$\arg(H(j\omega)) = -\arg(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

| ω/ω_n | $ F _{dB}$ | φ | Remarques |
|-----------------------|---|-------------------------|----------------------------|
| $\rightarrow 0$ | $\rightarrow 20\text{Log}K$ | $\rightarrow 0^\circ$ | asymptotes basse fréquence |
| $= 1$ | $20\text{Log}K - 3\text{dB}$ | -45° | pulsation de coupure |
| $\rightarrow +\infty$ | $\rightarrow 20\text{Log}K - 20\text{Log}(\omega/\omega_n)$ | $\rightarrow -90^\circ$ | asymptote haute fréquence |

Remarque :

- ❖ Les deux asymptotes à la courbe de gain se coupent à l'abscisse $\omega = \omega_n$
- ❖ la courbe réelle passe par les points suivants :
- ❖ le tracé de la phase est symétrique par rapport au point $(\omega_n, -45^\circ)$;
- ❖ la tangente au point de symétrie coupe asymptote 0° à $\omega = \omega_n/4,8$ et par symétrie asymptote -90° à $\omega = 4,8\omega_n$;
- ❖ le diagramme asymptotique peut être amélioré en traçant la tangente au point d'inflexion.

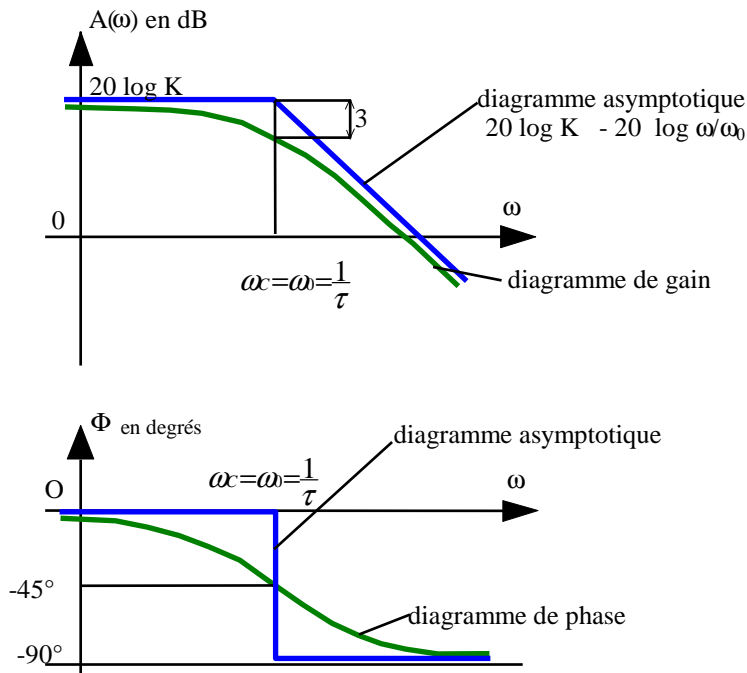


9.4 Identification d'un modèle du premier ordre à partir de la réponse harmonique

9.4.1

- L'asymptote horizontale permet de trouver K

- La pulsation de coupure permet de trouver τ . ($\omega_c = \omega = \frac{1}{\tau}$). On a $\Phi_{(-45^\circ)} = \omega_0$



9.5 Réponse harmonique d'un modèle du deuxième ordre

Reprenons $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Nous avons alors $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2m\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arc tan} \left(\frac{\frac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Il existe une résonance pour $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Démonstration :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2m\omega}{\omega_0}\right)^2}} = K \cdot D^{-\frac{1}{2}}$$

Il existe un maxima si la dérivée $|H(j\omega)|'$ s'annule.

$$\left(K \cdot D^{-\frac{1}{2}} \right)' = K \cdot D^{-\frac{3}{2}} \cdot D' = \frac{K \cdot D'}{D^{\frac{3}{2}}}$$

cette dérivée s'annule pour $D'_{(\omega)} = 0 = \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right)'$ $= 2\omega(\omega^2 + 2m^2\omega_0^2 - \omega_0^2)$

Il existe un maxima pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$ c'est à dire pour $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Construction :

❖ $\rightarrow 0 \quad |F(j\omega)| \approx \frac{K}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 (2\xi^2 - 1)}}$

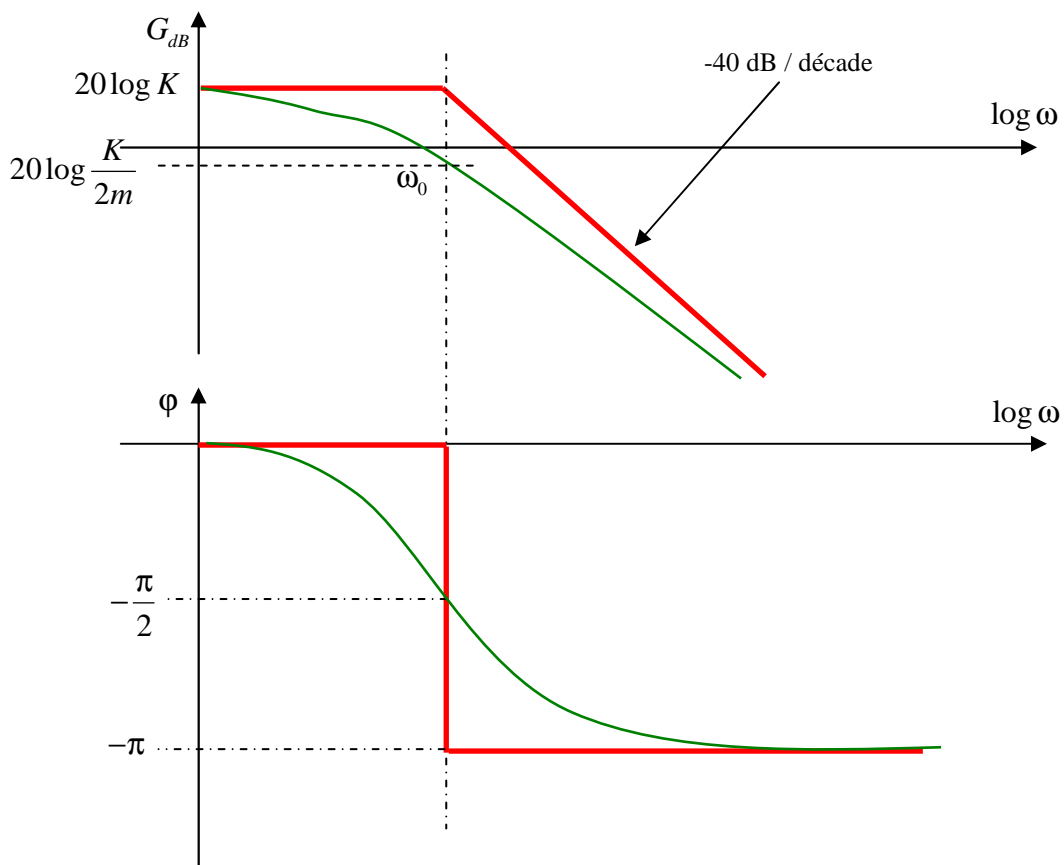
▸ si $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow |F(j\omega)| \approx \frac{K}{1 + \varepsilon}$ la courbe est au-dessous de l'asymptote

▸ si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow |F(j\omega)| \approx \frac{K}{1 - \varepsilon}$ la courbe est au-dessus de l'asymptote

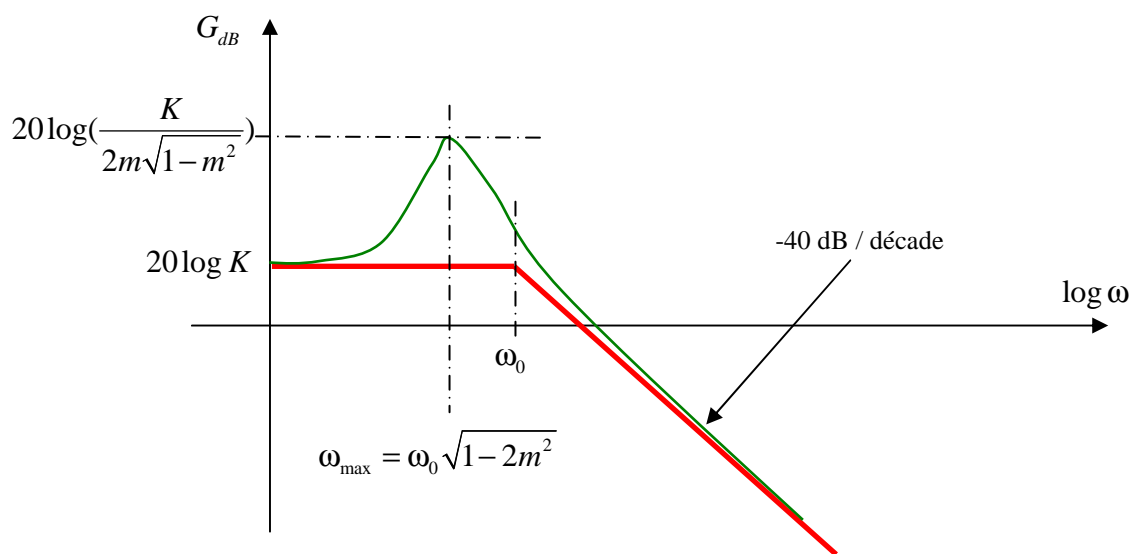
❖ $\omega \rightarrow +\infty \quad |F(j\omega)| \approx \frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

▸ $|F|_{db} = 20\text{Log}K - 40\text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ asymptote haute fréquence (-40db/décade)

➤ Cas où $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$



➤ Cas où $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



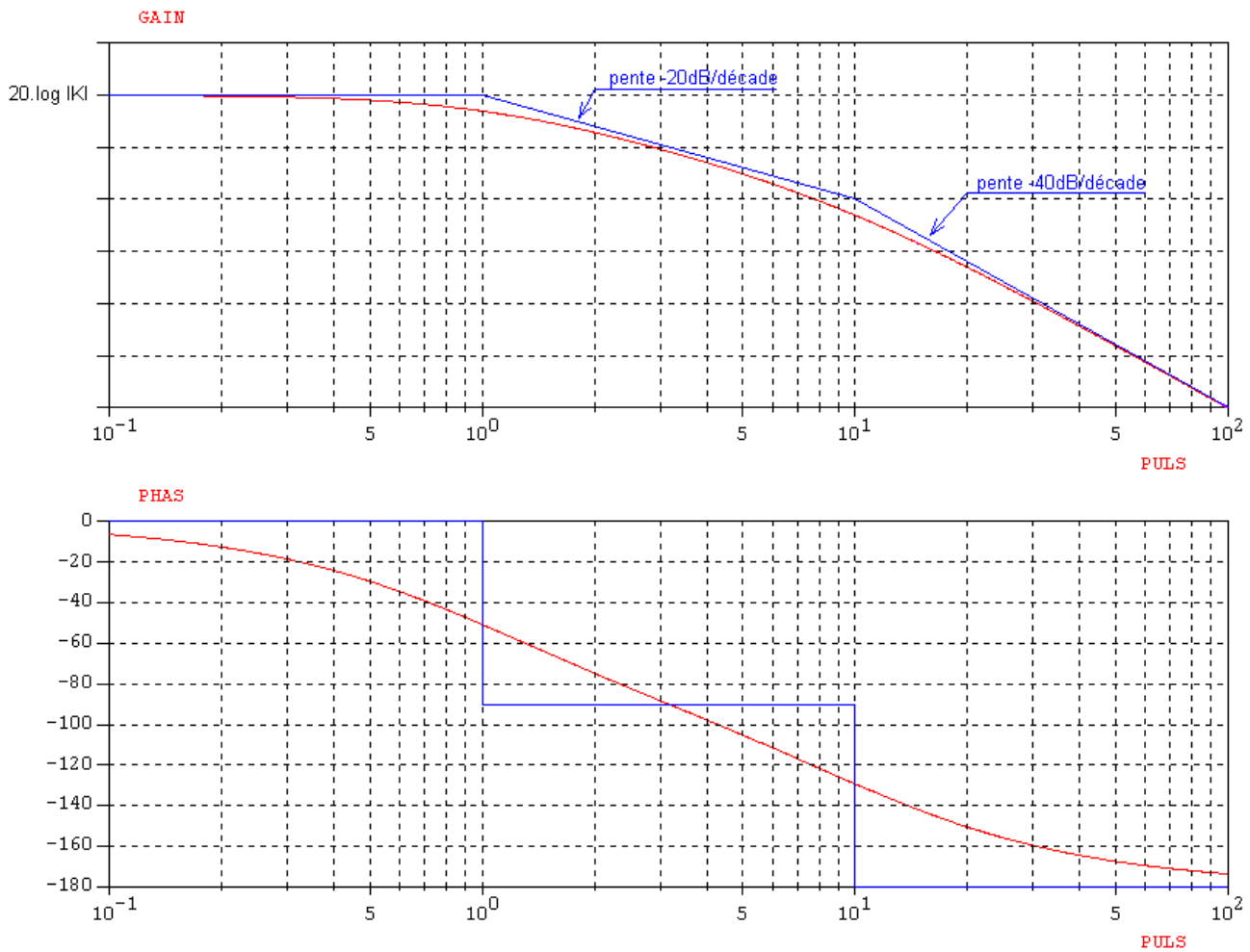
- grande.
- Pour ζ donné, la fréquence de coupure ω_c et donc la bande passante, sont d'autant plus grandes que la fréquence propre ω_p est grande.
- Rapidité et bande passante évoluent dans le même sens.

Tracé pour $\xi \geq 1$

La fonction de transfert présente deux pôles réels : $F(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$

On peut considérer que le système du deuxième ordre est équivalent à la superposition de deux systèmes du premier ordre. Dans le plan de BODE le tracé asymptotique se construit en ajoutant les tracés des deux systèmes du premier ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} |F|_{db} = 20 \text{Log} \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} = 20 \text{Log} K - 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right] - 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \right] \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \end{array} \right.$$

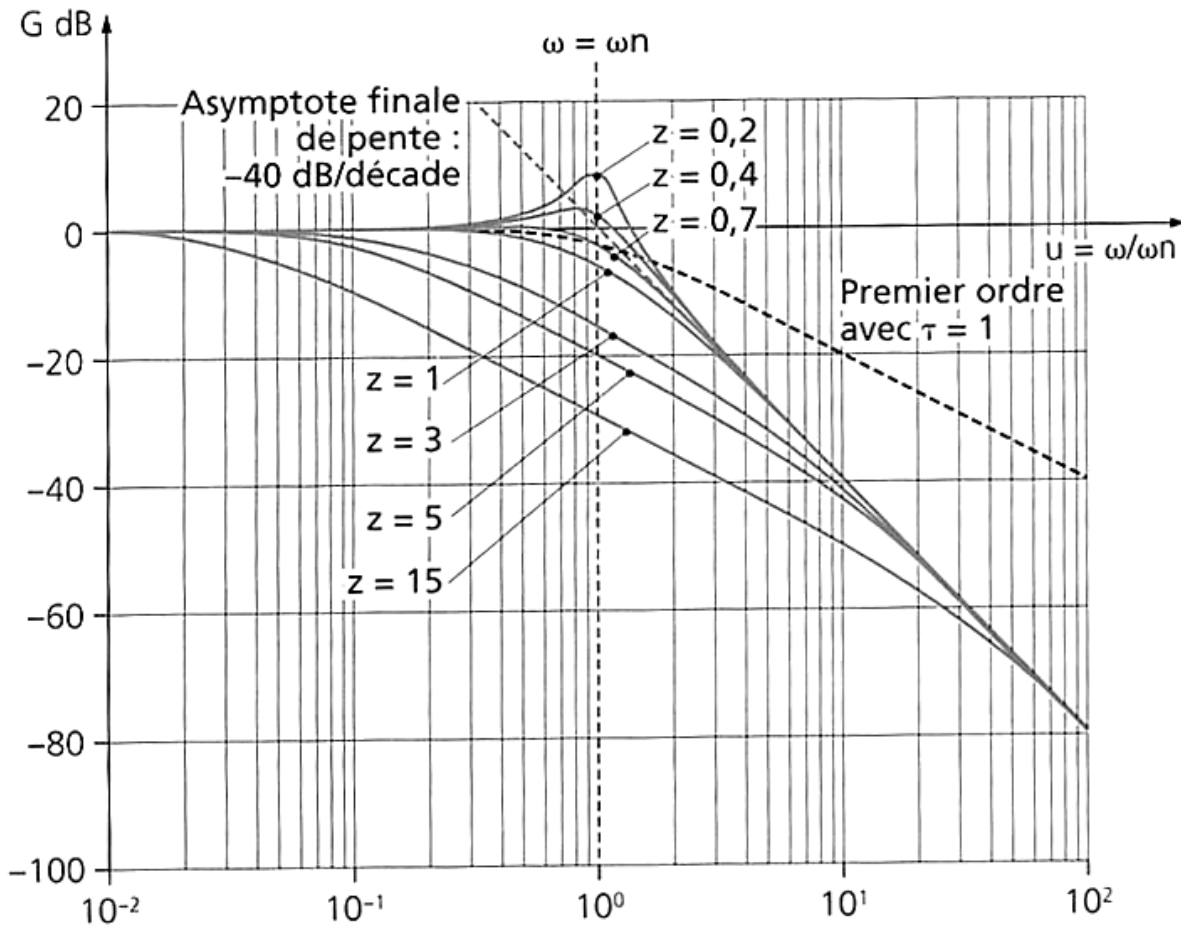


9.6 Identification d'un modèle du deuxième ordre à partir de la réponse harmonique

- L'asymptote horizontale permet de trouver K
- Le diagramme de phase permet de trouver ω_0 . On a $\Phi_{(-90^\circ)} = \omega_0$
- Le diagramme de gain permet de trouver ξ

Cas où $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$: $G_{dB} = 20 \log \frac{K}{2m}$ pour $\omega = \omega_0$

Cas où $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$: $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ pour $\omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}\omega_n$



Rapport d'amplitude : G en décibel pour différentes valeurs de z

