

4 L'infinité du cycle des quintes

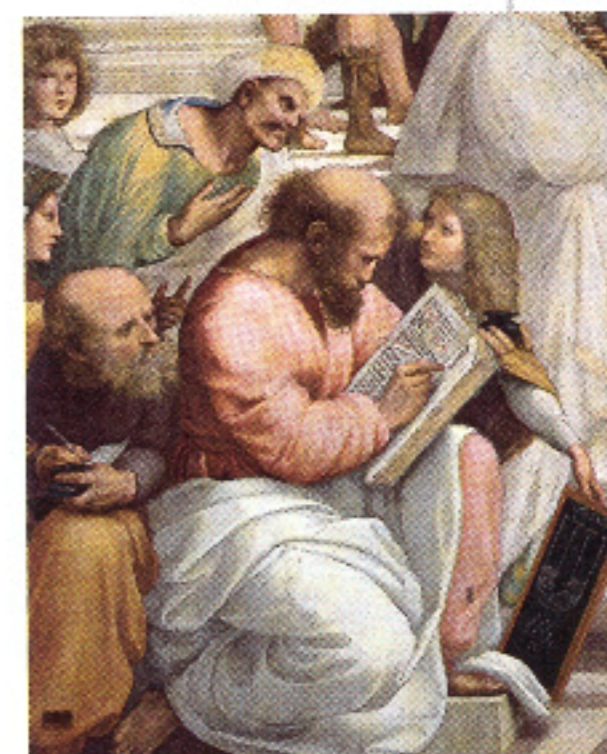
La gamme de Pythagore se construit par quintes successives. Comme le montrent les premières notes, les fréquences obtenues s'expriment toutes en fonction d'un rapport entre une puissance de trois et une puissance de deux : $f = \frac{3^n}{2^p} \times f_0$ (n et p étant des nombres entiers).

On peut arrêter de progresser dans les quintes quand la fréquence obtenue est égale à celle du *do* de la fin d'octave : $f = 2 \times f_0$. La boucle est alors bouclée. La fin du cycle correspond donc à l'équation mathématique : $\frac{3^n}{2^p} = 2$.

Cependant, 3 n'étant pas divisible par 2, cette équation n'a pas de solution et il est donc impossible d'atteindre exactement la fin de l'octave. On dit que le cycle des quintes est infini. Toutefois, certaines notes en sont parfois suffisamment proches : au bout de 12 quintes, mais aussi au bout 5, 7, 41, 53 quintes, etc. Ce qui signifie que la méthode de Pythagore permet d'élaborer des gammes contenant un autre nombre que douze notes. Il s'agit alors d'un choix d'ordre musical.

5 Pythagore ou la passion des nombres

Pythagore, célèbre pour le théorème de géométrie qui porte son nom, est né à Samos, île grecque de la mer Égée, aux environs de 580 av. J.-C. Il décède à Métaponte, au sud de l'Italie, vers 495 av. J.-C. Après plusieurs années de voyages autour de la Méditerranée, il s'installe à Crotona, au sud de l'Italie et fonde la communauté des pythagoriciens. Pour eux, l'Univers s'explique par les nombres : c'est ainsi qu'ils en viennent à étudier les règles des proportions dans la musique. Ils vont jusqu'à rechercher une harmonie mathématique du monde en essayant de faire correspondre les rapports des distances entre les sept planètes connues à l'époque et les intervalles des sept notes principales de la gamme.



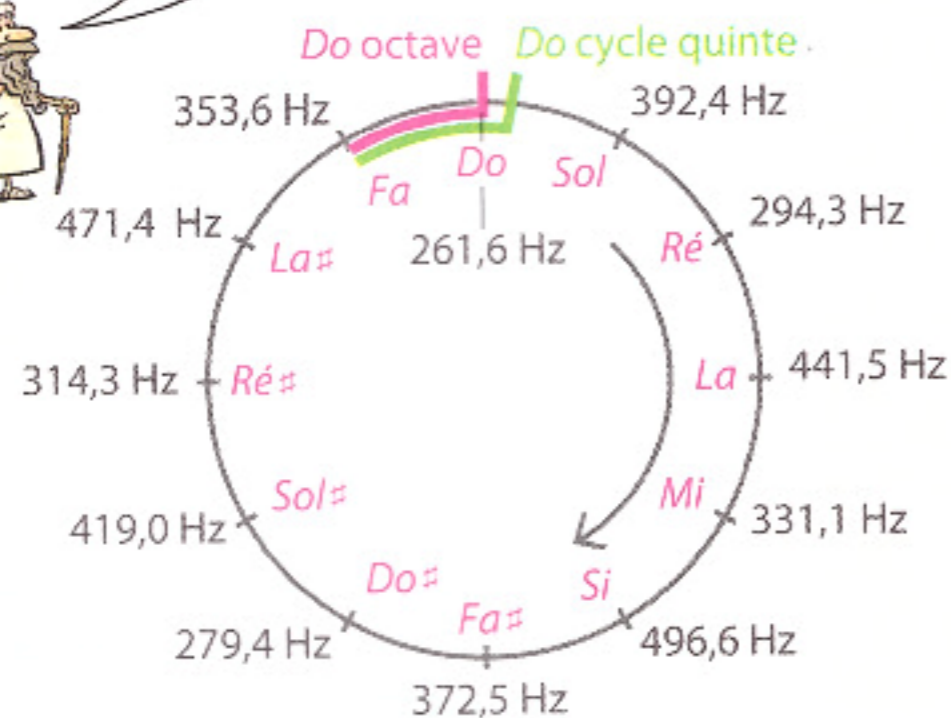
Pythagore représenté par Raphaël dans *L'École d'Athènes* (1508-1512), fresque murale de la Chambre de la Signature du palais du Vatican.

Vidéo

La gamme de Pythagore
hatier-clic.fr/es1199a

6 Valeurs des fréquences de la gamme à douze notes de Pythagore

On voit sur ce cycle des quintes que les notes n'apparaissent pas dans l'ordre que l'on connaît. Si on les classe par ordre de fréquences croissantes, on retrouve la gamme complète habituelle.



Le cycle des quintes ne se referme pas exactement : la dernière quinte du cycle (en vert) donne un *do* différent du *do* d'octave. L'intervalle entre ces notes est appelé « comma pythagoricien ». Pour que l'octave soit juste, les musiciens jouaient la quinte rouge : elle était dissonante et portait le nom de « quinte du loup ».



Penser la science

Comprendre que la science et les technologies ont un impact sur la société

Une étude révèle que les chirurgiens, lorsqu'ils opèrent en musique, ont des gestes plus précis.

Article

Les chirurgiens sont meilleurs... en musique
hatier-clic.fr/es199b

- Expliquer à travers cet exemple en quoi musique et science peuvent s'enrichir mutuellement.

➔ Comprendre ce qu'est la science, p. 12

QUESTIONS

- Dans quel intervalle doivent être placées les notes d'une gamme ? Pourquoi se limiter à cet intervalle ?
- Pythagore a choisi la quinte pour construire sa gamme. Qu'est-ce qu'une quinte ?
- Montrer que les notes obtenues avec les trois premières quintes de la gamme de Pythagore ont un rapport de fréquences avec la note *do* de : $\frac{3}{2}$, $\frac{3^2}{2^3}$ et $\frac{3^3}{2^4}$. Écrire ces rapports avec des nombres entiers.
- À partir de ces résultats, calculer les valeurs de fréquences du *sol*, du *ré* et du *la* de la gamme.
- Calculer la fréquence du *do* d'octave obtenu avec le cycle des quintes, puis celle du *do* d'octave selon la définition de l'octave. En déduire la valeur du comma pythagoricien.
- En vous aidant des valeurs du cycle, montrer que les intervalles entre les notes de la gamme de Pythagore ne sont pas constants.
- La gamme de Pythagore présentée contient douze notes. Quelles sont les autres possibilités pour cette gamme ?

➔ Pour approfondir : ex. 11 et 12 p. 206