

VIII- La musique, l'art de faire entendre les nombres

A- L'octave et l'intervalle

Certains sons ou notes sont agréables à l'oreille humaine, d'autres moins.

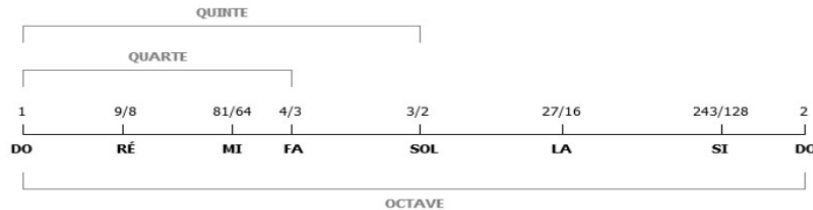
→ Un intervalle musicale entre deux notes est défini par le rapport de leurs fréquences.

Certains intervalles sont agréables (consonants) à l'oreille, d'autres moins (dissonants).

Un intervalle est dit consonant s'il peut s'écrire comme une fraction simple d'entiers naturels (2/1, 3/2, etc.)

→ L'octave est le plus petit intervalle séparant deux notes de même nom, mais de hauteurs différentes. Leurs fréquences fondamentales sont dans un rapport 2/1. L'octave est un intervalle consonant.

Il existe d'autres intervalles comme la quinte dont les notes ont un rapport de fréquences de 3/2.



B- Les gammes

→ Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.

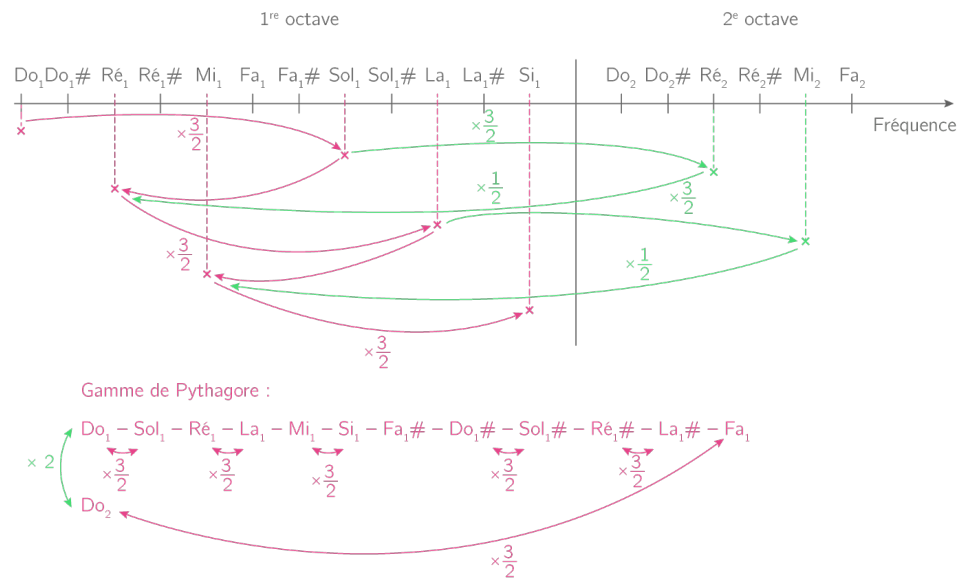
Les gammes utilisées en musique occidentale sont construites à partir d'intervalles sous forme de fractions simples : 3/2, 2/1 ou 4/3 par exemple.

La gamme de Pythagore se construit en avançant de quinte en quinte jusqu'à retomber pratiquement sur l'octave.

On obtient $f = (3^n / 2^p) \times f_0$

f est un nombre rationnel : fraction de deux nombres entiers.

Mais ce cycle « ne boucle pas » : le cycle des quintes est donc dit « infini » car il est impossible, mathématiquement, d'arriver exactement sur la fréquence dont la valeur est le double de la note de départ (l'octave de la note de départ). En effet 3 n'est pas divisible par 2 et le rapport $3^n / 2^p$ ne sera jamais égal à 2 pour obtenir $f = 2 \times f_0$.



L'intervalle entre la dernière note (qui ne tombe pas sur l'octave) et la note de l'octave s'appelle « comma pythagoricien » : cette quinte est dissonante et porte le nom de « quinte du loup ». La valeur du comma pythagoricien est donnée par : $f(\text{do})_{\text{quinte}} / f(\text{do})_{\text{octave}}$.

Les gammes naturelles présentent l'inconvénient de ne pas avoir des intervalles constants. Cela rend difficile la **transposition** en musique : changer de tonalité en modifiant toutes les notes d'une œuvre musicale.

À la fin du 17^{ème} siècle, une gamme à intervalle égaux (constants) a été adoptée : la gamme tempérée.

→ La gamme tempérée est formée de douze intervalles égaux appelés demi-tons. La valeur du rapport d'un demi-ton est $t_{1/2} = 2^{1/12}$.

Cela veut-dire que $f_1 / f_0 = f_2 / f_1 = f_3 / f_2 = \dots = f_{11} / f_{10} = f_{12} / f_{11} = t_{1/2} = 2^{1/12} = 1,06$ (les f sont irrationnels).

La gamme tempérée a rendu la musique plus pratique, même si elle a un peu perdu en justesse.

La gamme tempérée est celle présente sur le piano, pour lequel deux touches successives (blanche ou noire) sont séparées par un demi-ton (figure ci-contre).

